Leçon 23 - Relations (binaires) sur E^2

8 octobre 2025

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Définitions

Définition - Relation d'ordre

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Eléments particuliers : majorants, minorants

Définition - Majorants,minorants

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Eléments particuliers : majorants, minorants

Définition - Majorants,minorants

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Exemple Majorant sur $(\leqslant, \mathbb{R})$

Eléments particuliers : majorants, minorants

Définition - Majorants,minorants

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Exemple Majorant sur $(\leqslant, \mathbb{R})$
Exemple Majorant sur $(|, \mathbb{N})$

Eléments particuliers : majorants, minorants

Définition - Majorants,minorants

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Exemple Majorant sur $(\leqslant, \mathbb{R})$

Exemple Majorant sur $(|, \mathbb{N})$

Exercice

Pour la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathbb{R}$.

Donner un majorant et un minorant de $\{\{1,2,3\},\{2,3,5\}\}$

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

En fait, a est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

En fait, a est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

Théorème - Unicité

Un plus petit (grand) élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique.

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

En fait, a est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

Théorème - Unicité

Un plus petit (grand) élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique.

Démonstration

Attention

Attention. Attention au mot

Ici il y a une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.
S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal...
Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne inférieure...

Attention

Attention. Attention au mot

Ici il y a une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.
S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal...
Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne inférieure...

Exercice
On suppose que $\preceq$ est une relation d'ordre total sur E. Soit $A \subset E$. On suppose que A est fini.
Montrer que A admet nécessairement un plus grand élément.
Conclusion pour les sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Eléments maximaux/minimaux

Remarque Généralisation : élément maximal ou minimal
Cela signifie qu'il n'y a pas de plus grand élément dans A (resp. plus petit).

Eléments maximaux/minimaux

Remarque Généralisation : élément maximal ou minimal
Cela signifie qu'il n'y a pas de plus grand élément dans A (resp. plus petit).

Exemple Ensemble avec plusieurs éléments maximaux

Eléments particuliers : borne supérieure et borne inférieure

Une dernière définition, pour des cas plus simples que celui de l'exemple précédent :

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$.

Eléments particuliers : borne supérieure et borne inférieure

Une dernière définition, pour des cas plus simples que celui de l'exemple précédent :

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$.

Cette définition sera au coeur de la définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ (à partir de $\mathbb{Q}$ avec la relation d'ordre totale $\leqslant$). Mais elle sert aussi à d'autres moments du cours

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(E, \subset)$

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(E, \subset)$

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(E, \subset)$

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

1. $\forall\ x \in E, x \preceq a$
2. $\forall\ z$ tel que $\forall\ x \in E, x \preceq z$, alors $a \preceq z$

   $\Longleftrightarrow \forall\ u \preceq a, \exists\ x \in E$ tel que $u \preceq x$

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(E, \subset)$
Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

1. $\forall\, x \in E, x \preceq a$
2. $\forall\, z$ tel que $\forall\, x \in E, x \preceq z$, alors $a \preceq z$
   $\Longleftrightarrow \forall\, u \preceq a, \exists\, x \in E$ tel que $u \preceq x$

<u>Exercice</u>
Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM ?

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(E, \subset)$

Exemple Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

1. $\forall\, x \in E, x \preceq a$
2. $\forall\, z$ tel que $\forall\, x \in E, x \preceq z$, alors $a \preceq z$
   $\Longleftrightarrow \forall\, u \preceq a, \exists\, x \in E$ tel que $u \preceq x$

<u>Exercice</u>

Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM ?

<u>Exercice</u>

Comment peut-on définir l'ensemble borne supérieure de deux ensembles A et B pour la relation $\leqslant$?

Même question avec la borne inférieure ?

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Ordre strict

Définition - Ordre strict

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit la relation $\prec$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } x \neq y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Ordre strict

Définition - Ordre strict

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit la relation $\prec$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } x \neq y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple Sur $\mathbb{R}$

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

Exemple Fractions rationnelles
Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$ est une relation d'équivalence.

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

Exemple Fractions rationnelles
Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ par $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ ssi $a\times d = b\times c$ est une relation d'équivalence.

Savoir-faire. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, symétrique et transitive.

Exercices

<u>Exercice</u>

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ est une relation d'équivalence. ((v_n) non nulle à partir d'un certain rang).

Exercices

<u>Exercice</u>

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ est une relation d'équivalence. ((v_n) non nulle à partir d'un certain rang).

<u>Exercice</u>

Soit $f : E \to F$. On définit une relation $\mathscr{R}_f$ sur E par $x\mathscr{R}_f y \iff f(x) = f(y)$.
Montrer que $\mathscr{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E.

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}$.
a est un représentant de $C(a)$.

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \,|\, x\mathscr{R}a\}$.
a est un représentant de $C(a)$.

Exemple Fractions rationnelles

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}$.
a est un représentant de $C(a)$.

Exemple Fractions rationnelles

Exercice

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{C}^2$, par $z = a + ib\mathscr{R}z' = a' + ib'$ ssi $a \times b' = a' \times b$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}$.
a est un représentant de $C(a)$.

Exemple Fractions rationnelles

Exercice

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{C}^2$, par $z = a + ib\mathscr{R}z' = a' + ib'$ ssi $a \times b' = a' \times b$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Exercice

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$, par $\theta\mathscr{R}\theta'$ ssi $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \theta' = 2k\pi$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Caractérisation

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence

Soient $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E, a et b deux éléments de E. Alors

$$a \mathscr{R} b \Leftrightarrow C(a) = C(b).$$

Caractérisation

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence

Soient $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E, a et b deux éléments de E. Alors

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b).$$

Démonstration

Caractérisation

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence

Soient $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E, a et b deux éléments de E. Alors

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b).$$

Démonstration

Exercice

On note $\mathscr{P}$ le plan usuel. On définit sur $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ la relation $\mathscr{R}$ par

$$(A,B)\mathscr{R}(C,D) \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence. Que représentent les classes d'équivalence de cette relation ?

Système de représentant

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que :
pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$.
On note souvent $S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ un tel système.
Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Système de représentant

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que :
pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x \mathscr{R} s$.
On note souvent $S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ un tel système.
Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Remarque Notation floue

Système de représentant

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que :
pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$.
On note souvent $S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ un tel système.
Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Remarque Notation floue

Exemple Système de représentant pour $\cdot \equiv \cdot[2\pi]$

Système de représentant

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que :
pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$.
On note souvent $S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ un tel système.
Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Remarque Notation floue

Exemple Système de représentant pour $\cdot \equiv \cdot [2\pi]$

Idée de **démonstration**

⇒ Eléments extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relations d'équivalence

Partition de E

Heuristique - Classe d'équivalence : partition de E

Avoir une relation d'équivalence, c'est faire l'assimilation entre différents objets à priori différents et finalement identique (ou plutôt équivalent) du point de vue de la relation. L'ensemble du départ est alors réduit en partie plus petite, ces éléments sont les classes d'équivalence. Elles forment une partition de l'ensemble initial.

Partition de E

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

Partition de E

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

Proposition - Partition de E

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Partition de E

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

Proposition - Partition de E

Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration

Réciproque ?

Remarque La réciproque est vraie

Réciproque ?

Remarque La réciproque est vraie

Remarque Classes d'équivalence et dénombrement

Réciproque ?

Remarque La réciproque est vraie

Remarque Classes d'équivalence et dénombrement

Application Dénombrement et classe d'équivalence

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

$\Rightarrow$ Relation d'équivalence

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- Majorants, minorants

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- Majorants, minorants
- Plus grand et plus petit élément

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- Majorants, minorants
- Plus grand et plus petit élément
- Borne supérieure et borne inférieure

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

$\Rightarrow$ Relation d'équivalence

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relation d'équivalence

- Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relation d'équivalence

- Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie
- Différents exemple =(ensembles) ou =(nombres), ⇔ ou ≡...

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relation d'équivalence

- Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie
- Différents exemple =(ensembles) ou =(nombres), ⇔ ou ≡. . .
- Elargissement de l'égalité. Classe d'équivalence :
  ces sont les mêmes (mais notés différemment. . .)

Conclusion

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

⇒ Relation d'équivalence

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 11 - Application entre ensembles
- Exercice n°266 & 268