

Leçon 23 - Relations (binaires) sur E^2

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- 1. Problemes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
- T. T.O.G.O.
- 4.1. Definition
- 4.2. Ordre to
- 4.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particulien
- 4.5. Ordre strict
- 5. Relation
- d'équivalenc
- 5.1. Propriétés caractéristiques
- Classes d'équivalenc
- 5.3. Partition de E

- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1. Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de E

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\it E}^2$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

. Problèmes

2. Grapne

Relations binaires

. Relation d'ordre

4.1. Définitions

.

1.2. Ordre total

.o. Ordre partier

4. Elements particuli

. . .

. Relation

d'équivalence

. Propriétés caractéristiqu

Classes d'équival

5.3. Partition de E

4 D > 4 P > 4 E > 4 E > E 9 Q Q

- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1. Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de I

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\cal E}^2$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- . Problèmes
- . Graphe
- 3. Relations binaires
- . Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- +. I. Delililions
- .3. Ordre partiel
- 1.4 Flámente particuliere
- .4. Elements particulle
- . Relation
- l'équivalence
- 5.1. Propriétés caractéristique
 - 2. Classes d'équival
- 5.3. Partition de E

Définitions

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problemes
 - . Grapne
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 40.0.1....
- 4.2. Orure total
- 4.4 Fléments particuliers
- 4. Elements particulier
- Relation
- équivalence
 - Propriétés caractéristiq
- Classes d'équivalen
- E 2 Partition do E
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > E 9900

Dátin

Définition - Relation d'ordre

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- 2. Graphe
- Relations binaires.
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1 Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence

Lecon 23 - Relations (binaires) sur E^2

⇒ Fléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- 4.4. Eléments particuliers

⇒ Fléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- 4.4. Eléments particuliers

Définition - Majorants, minorants

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$;
- $M \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \leq x$;

4.4. Eléments particuliers

Définition - Majorants, minorants

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$;
- $M \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \leq x$;

Exemple Majorant sur (\leq, \mathbb{R})

- 4.4. Eléments particuliers

Définition - Majorants, minorants

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$;
- $M \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \leq x$;

Exemple Majorant sur (\leq, \mathbb{R})

Exemple Majorant sur $(|, \mathbb{N})$

4.4. Eléments particuliers

4 D > 4 B > 4 B > 4 B > 9 0 0

Définition - Majorants, minorants

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$;
- $M \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \leq x$;

Exemple Majorant sur (\leq, \mathbb{R})

Exemple Majorant sur $(|, \mathbb{N})$

Exercice

Pour la relation d'ordre \subset sur \mathbb{R} .

Donner un majorant et un minorant de $\{\{1,2,3\},\{2,3,5\}\}$

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- ▶ $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$;
- ▶ $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problèmes
- 2. Graph
- 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - I 1 Définitions
 - 4.2 Ordra total
 - 4.2. Ordro nartial
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.4. Elements particulier
 - . Relation
 - d'équivalence
 - . Propriétés caractéristiques
 - D .:: 1 T
- 5.3. Partition de E

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- ▶ $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$;
- ▶ $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$.

En fait, α est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problèmes
- 2. Grapl
- 3. Relations binaires
 - 4 Relation d'ordre

 -
 - 1.2. Ordre total
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
- 5. Relation
- d'équivalence
 - Proprietes caractéristiques
 - 3 Partition do E
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

Eléments particuliers : plus grand élément, plus petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- ▶ $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$;
- ▶ $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$.

En fait, α est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

Théorème - Unicité

Un plus petit (grand) élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problèmes
- 2. Graph
- 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - of Decisions
 - 4.2 Ordra total
 - 4.2. Ordre total
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
 - 5. Relation
- d'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
 - . Classes d'équivale
- 5.3. Partition de E

Définition - Plus grand élément, plus petit élément

Soit \leq une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :

- ▶ $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$;
- ▶ $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$.

En fait, α est respectivement un majorant (minorant) de A et un élément de A.

Théorème - Unicité

Un plus petit (grand) élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique.

Démonstration

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\it E}^2$

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problèmes
- 2. Graph
- 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre

 -
 - 1.2. Ordre total
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
- 5. Relation
- d'équivalence
 - e or an arrangement
 - 3. Partition de E
- 5.3. Partition de E

◆□▶◆骨▶◆団▶◆団▶ ■ 釣@@

Attention

Attention. Attention au mot

lci il y a une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.

S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal...

Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne inférieure...

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\cal E}^2$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

1. Problemes

2. Grapne

3. Relations binaires

1 Relation d'ordre

1.1. Définitions

4.2. Ordre total

4.3. Ordre partiel

4.4. Eléments particuliers

o. Ordio billor

5. Relation

d'équivalence

. Proprietes caracteristiques

Partition do E

5.3. Partition de ${\cal E}$

Attention, Attention au mot

lci il y a une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.

S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal...

Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne

inférieure...

Exercice

On suppose que \leq est une relation d'ordre total sur E. Soit $A \subset E$. On suppose que A est fini.

Montrer que A admet nécessairement un plus grand élément. Conclusion pour les sous-ensemble de $\mathbb N$.

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- 1. Problemes
- 2. Graph
- 3. Relations binaires
 - 1. Relation d'ordre

 -
 - .2. Ordre total
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordro strict
 - 5. Relation
- d'équivalence
 - 5.1 Propriétés carac
 - 0.01-------
 - 2 Partition do F
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

Eléments maximaux/minimaux

Remarque Généralisation : élément maximal ou minimal Cela signifie qu'il n'y a pas de plus grand élément dans A (resp. plus petit).

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- 1. Problèmes
- 2 Graphe
- 2 Polotione bineiroe
- 4 Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 1.2. Ordre total
- .3. Ordre partiei
- 4.4. Eléments particuliers
- 5. Relation
- d'équivalence
 - Propriétés caractéristique
 - Olubboo o oquiva
- 5.3. Partition de E

Eléments maximaux/minimaux

Remarque Généralisation : élément maximal ou minimal Cela signifie qu'il n'y a pas de plus grand élément dans A (resp. plus petit).

Exemple Ensemble avec plusieurs éléments maximaux

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\it E}^2$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

1. Problèmes

2. Graphe

3 Polations binaires

4 Relation d'ordre

1.1 Dáfinitions

4.1. Definitions

1.2. Ordre total

I.3. Ordre partiel

4.4. Eléments particuliers

5. Relation

d'équivalence

Propriétés caractér

Classes d'ánuivalence

D I T

5.3. Partition de E

Lecon 23 - Relations

Une dernière définition, pour des cas plus simples que celui de l'exemple précédent :

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

. Problèmes

2. Graphe

3. Relations binaires

4. Relation d'ordre

- 1.1. Définitions
- I.2. Ordre total
- 4.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particuliers

1.5. Ordre strict

- 6. Relation
- d'équivalence
 - I. Propriétés caractéristique
 - Classes d'équivaler
- 5.3. Partition de E

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note b = inf A.

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$.

Cette définition sera au coeur de la définition de l'ensemble \mathbb{R} (à partir de \mathbb{Q} avec la relation d'ordre totale \leq). Mais elle sert aussi à d'autres moments du cours

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problemes
- 2. Graph
- 3. Relations binaires
 - . Relation d'ordre
 - 1. Définitions
 - 2 Ordro total
 - I.2. Ordre total
- 4.4. Eléments particuliers
- 4.5. Ordre strict
- 5. Relation
- d'équivalence
- 5.1 Propriétés caracté
 - . Classes d'équivalence
- 3 Partition do E
- 5.3. Partition de E

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour (E, \subset)

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- 1. I Toblemes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.1. Delilililions
- 4.2. Ordre total
- 4.0. Ordio partioi
- 4.4. Eléments particuliers
- Relation
- d'équivalence
- equivalence
- 0. Danielan de 17
- 5.3. Partition de E

Exemples et exercice

Exemple Borne inférieure et supérieure pour (E, \subset) **Exemple** Borne inférieure et supérieure pour (N, |)

Lecon 23 - Relations (binaires) sur E^2

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

- 4.4. Eléments particuliers

Exemple Borne inférieure et supérieure pour (E, \subset) **Exemple** Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

- 1. $\forall x \in E, x \leq a$
- 2. $\forall z \text{ tel que } \forall x \in E, x \leq z, \text{ alors } a \leq z$ $\iff \forall u \leq a, \exists x \in E \text{ tel que } u \leq x$

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- Problèmes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
 - 1. Définitions
- 4.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particuliers
- . Relation
- '. nelalion l'équivalence
- equivalence
- Proprietes caractéristi
- Olubboo o oquiva
- 5.3. Partition de E

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

- 1. $\forall x \in E, x \leq a$
- 2. \forall z tel que \forall x \in E, x \leq z, alors $a \leq$ z $\iff \forall$ u \leq a, \exists x \in E tel que u \leq x

Exercice

Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM?

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problèmes
 - . Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 1. Définitions
 -
 - .2. Ordre total
- 4.4. Eléments particuliers
- 4.4. Elements particuliers
- . Relation
- d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caracté
 - 2. Classes d'équivalence
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

Savoir-faire. Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

- 1. $\forall x \in E, x \leq a$
- 2. $\forall z \text{ tel que } \forall x \in E, x \leq z, \text{ alors } a \leq z$ $\iff \forall u \leq a, \exists x \in E \text{ tel que } u \leq x$

Exercice

Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM?

Exercice

Comment peut-on définir l'ensemble borne supérieure de deux ensembles A et B pour la relation \leq ? Même question avec la borne inférieure?

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- . Problèmes
- Graphe
- Relations binaires
- I. Relation d'ordre
 - . Définitions
- 2 Ordro total
- 2. Ordre total
- 4.4. Eléments particuliers
- 4.5. Ordre strict
- . Relation
- d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caracte
 - . Classes d'équivalence
- 5.3. Partition de E

- ⇒ Relations d'équivalence
- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
- 4.1 Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de E

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- Problèmes
- . Graphe
- . Relations binaires
- A. Datation disease
- . Holation a oran
- .1. Définitions
- 1.2 Ordro total
- 4.2. Ordre total
- 4.4. Elements particu
- . Relation
- d'équivalence
- equivalence
 - . I reprietes caracteristiqu
- 0. Danielan de 17
- 5.3. Partition de E

i. i iobienies

.. Спартю

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ordre total

4.2. Ordre total

4.4. Eléments particulie

4.5. Ordre strict

. Relation

'équivalence

roprietes caracteristiqu

Classes d'equival

5.3. Partition de ${\cal E}$

Définition - Ordre strict

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit la relation < par :

$$x < y \Leftrightarrow (x \le y \text{ et } x \ne y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problémes
 - 2. Graphe
 - Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1. Définitions
 - .1. Definitions
 - 1.2. Ordre total
 - 4.3. Ordre partier
- 4.4. Eléments particulier 4.5. Ordre strict
- _
- 5. Relation
- 'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
 - Classes d'equivi
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

Définition - Ordre strict

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On définit la relation < par :

$$x < y \Leftrightarrow (x \le y \text{ et } x \ne y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple Sur ℝ

- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1. Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de I

Leçon 23 - Relations (binaires) sur ${\cal E}^2$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

Problèmes

2. Graphe

Relations binaires

Relation d'ordre

I 1 Définitions

4.1. Definitions

4.2. Ordre total

4.3. Ordre partiel

4.4. Eléments particulier

Deleties

. Relation l'équivalence

5.1. Propriétés caractéristiques

2 Classes d'ánnivalence

.. Classes d'equivai

5.3. Partition de E

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit ${\mathscr R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
 - .1. Définitions
 - i. Deliritions
- 4.3 Ordre partiel
- 4.4 Fléments particuliers
- Dedro etriot
- . Relation
- d'équivalence
- 5.1. Propriétés caractéristiques
 - Classes d'équivale
- 5.3. Partition de E

Relation d'équivalence

Définition - Relation d'équivalence

Soit ${\mathscr R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problémes
 - 2. Graphe
 - Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - 1 Définitions
 - i.i. Delinitions
 - .2. Ordre total
 - .o. Ordre partier
 - I.4. Eléments particuliers
 - Deletion
 - d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - . r roprictos curactoristiques
 - Ontobood or organic
- 5.3. Partition de E

Définition - Relation d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

Exemple Fractions rationnelles Montrer que \mathcal{R} définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$ est une relation d'équivalence.

⇒ Fléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- 5.1. Propriétés caractéristiques

5.1. Propriétés caractéristiques

Définition - Relation d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple Stade Toulousain

Exemple Fractions rationnelles

Montrer que \mathcal{R} définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$ est une relation d'équivalence.

Savoir-faire. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, symétrique et transitive.

Exercices

Exercice

Montrer que \mathscr{R} définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ est une relation d'équivalence. $((v_n)$ non nulle à partir d'un certain rang).

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
 - 1 D45-31---
 - 1.1. Definitions
 - 4.2. Ordre total
- 4.4 Elémente particulier
- 4.4. Eléments particulie
- 5. Relation
- equivalence
- 5.1. Propriétés caractéristiques
 - . Classes d'equiva
- 5.3. Partition de ${\cal E}$

.

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2 Ordre total

4.2. Ordre tota

4.4. Eléments partic

4.4. Elements particu

5. Relation

d'équivalence

5.1. Propriétés caractéristiques

Classes d'équivalenc

5.3. Partition de E

Exercice

Montrer que \mathscr{R} définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ est une relation d'équivalence. $((v_n)$ non nulle à partir d'un certain rang).

Exercice

Soit $f: E \to F$. On définit une relation \mathcal{R}_f sur E par $x\mathcal{R}_f y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$.

Montrer que \mathcal{R}_f est une relation d'équivalence sur E.

- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 4.1. Définitions
 - 4.2. Ensemble avec ordre total
 - 4.3. Ensemble avec ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
- 5. Relation d'équivalence
 - 5.1. Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de E

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problèmes
 - . Graphe
 - . Relations binaires
 - Relation d'ordre

 - .1. Définitions
 - 1.2. Ordre total
- 4.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particuliers
 - Deteller
- i. Relation
- d'équivalence
- 5.2. Classes d'équivalence
- E 2 Partition do E
- 5.3. Partition de E

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x \mathcal{R}a\}.$

a est un représentant de C(a).

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
 - Définitions
 - . I. Delinitions
 - .2. Ordre total
- 4.5. Ordre partier
- 4.4. Eléments particu
- . Relation
- d'équivalence
- 1. Propriétés caractéristiques
- 5.2. Classes d'équivalence
- 5.3. Partition de E

Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x \mathcal{R}a\}.$

a est un représentant de C(a).

Exemple Fractions rationnelles

Lecon 23 - Relations (binaires) sur E^2

- ⇒ Fléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- 5.2. Classes d'équivalence

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x \mathcal{R} a\}.$

a est un représentant de C(a).

Exemple Fractions rationnelles

Exercice

Montrer que \mathscr{R} définie sur \mathbb{C}^2 , par $z=a+ib\mathscr{R}z'=a'+ib'$ ssi $a\times b'=a'\times b$ est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalence de \mathcal{R} ?

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problèmes
 - . Graphe
 - 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - 1. Définitions
 - 2 Ordre total
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
 - 5. Relation
 - d'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de ${\cal E}$

Défnition - Classe d'équivalence

Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x \mathcal{R} a\}.$

a est un représentant de C(a).

Exemple Fractions rationnelles

Exercice

Montrer que \mathscr{R} définie sur \mathbb{C}^2 , par $z = a + ib\mathscr{R}z' = a' + ib'$ ssi $a \times b' = a' \times b$ est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalence de \mathcal{R} ?

Exercice

Montrer que \mathscr{R} définie sur \mathbb{R} , par $\theta \mathscr{R} \theta'$ ssi $\exists \ k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \theta' = 2k\pi$ est une relation d'équivalence.

Quelles sont les classes d'équivalence de \mathcal{R} ?

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

. Problémes

2. Graphe

3. Relations binaires

Relation d'ordre

1. Définitions

2. Ordre total

.3. Ordre partiel

1.4. Eléments particulier

1.5. Ordre strict

. Relation 'équivalence

E 1 Propriétés apropri

5.2. Classes d'équivalence

5.2. Classes d'equiv

5.3. Partition de I

Caractérisation

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence

Soient ${\mathscr R}$ une relation sur un ensemble $E,\,a$ et b deux éléments de E. Alors

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b)$$
.

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - 1 Définitions
 -
 - 0.0-4---------
 - 1.4. Eléments particuliers
 - Elements particulie
 Ordro stript
 - . Relation
 - 'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
- 5.2. Classes d'équivalence
- 5.3. Partition de E

Soient ${\mathscr R}$ une relation sur un ensemble E , a et b deux éléments de E . Alors

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b)$$
.

Démonstration

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - Définitions
 - 4.1. Delinitions
 - .2. Ordre total
 - Ordre partier
 - 4.4. Eléments particuli
 - Relation
 - 6. Relation
 - equivalence
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 3 Partition do E
 - 5.3. Partition de E

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence

Soient ${\mathscr R}$ une relation sur un ensemble $E,\,a$ et b deux éléments de E. Alors

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b)$$
.

Démonstration

Exercice

On note ${\mathscr P}$ le plan usuel. On définit sur ${\mathscr P} \times {\mathscr P}$ la relation ${\mathscr R}$ par

 $(A,B)\mathcal{R}(C,D)\Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

Il s'agit d'une relation d'équivalence. Que représentent les classes d'équivalence de cette relation?

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - . Problèmes
 - . Grapne
 - 3. Relations binaires
 - 4. Relation d'ordre
 - 1. Définitions
 - 2 Ordro total
 - .2. Ordre total
 - 4.4 Elémente particulier
 - 4.4. Elements particuliers
 - 5. Relation
 - d'équivalence
 - 1. Propriétés caractéristique
 - 5.2. Classes d'équivalence
 - 5.3. Partition de ${\cal E}$

Système de représentant

Définition - Système de représentants

(sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que : pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$. On note souvent $S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ un tel système. Si E est fini, il existe toujours un système de représentants

Leçon 23 - Relations (binaires) sur E^2

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

1. Problèmes

2. Graphe

3. Relations binaires

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ordre total

4.5. Ordre partier

4.4. Eléments particul

Relation

. Relation 'équivalence

P----itit- ----ti-i-

5.2. Classes d'équivalence

2 Partition do E

5.3. Partition de E

Système de représentant

Définition - Système de représentants

(sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\varpi}$, un ensemble $S \subset E$ tel que : pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x \mathcal{R} s$. On note souvent $S_{\,\underline{\underline{E}}}$ un tel système. Si E est fini, il existe toujours un système de représentants

Remarque Notation floue

Lecon 23 - Relations (binaires) sur E^2

⇒ Fléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

5.2. Classes d'équivalence

- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - I.1. Définitions
 -
- 4.2. Ordre tota
- 4.5. Ordre partier
- 4.4. Eléments particuliers
 - s.s. Ordre strict
- 5. Relation
- d'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
- 5.2. Classes d'équivalence
- .3. Partition de E

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que : pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$.

On note souvent $S_{\frac{E}{20}}$ un tel système.

Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Remarque Notation floue

Exemple Système de représentant pour $\cdot \equiv \cdot [2\pi]$

⇒ Eléments extrêmes

⇒ Relations d'équivalence

- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - .1. Définitions
 - 4.2 Ordro total
- 4.2. Ordre total
- 4.4. Clámonto motimoli
- 4.4. Elements particule
- Rolation
- 5. Relation
- d'équivalence
 - Propriétés caractéristiques
- 5.2. Classes d'équivalence
- 5.3. Partition de E

Définition - Système de représentants

On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$ tel que : pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x \mathscr{R} s$.

On note souvent $S_{\frac{E}{20}}$ un tel système.

Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon, cela peut nécessiter l'axiome du choix)

Remarque Notation floue

Exemple Système de représentant pour $\cdot \equiv \cdot [2\pi]$ Idée de **démonstration**

⇒ Relations d'équivalence

Problèmes

Relations binaires. 4. Relation d'ordre 4.1 Définitions

2. Graphe

- ⇒ Fléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

- 5.3 Partition de E

4.4. Eléments particuliers

4.2. Ensemble avec ordre total 4.3. Ensemble avec ordre partiel

5.3. Partition de E

4.5. Ordre strict 5. Relation d'équivalence

4 D > 4 同 > 4 豆 > 4 豆 > 豆 め Q (~

Relations binaire

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ordre total

4.4. Eléments particuli

.5. Ordre strict

Relation

Relation équivalence

Propriétés caractéristiques

Proprietes caracteristique

D and I T

5.3. Partition de E

Heuristique - Classe d'équivalence : partition de ${\it E}$

Avoir une relation d'équivalence, c'est faire l'assimilation entre différents objets à priori différents et finalement identique (ou plutôt équivalent) du point de vue de la relation. L'ensemble du départ est alors réduit en partie plus petite, ces éléments sont les classes d'équivalence. Elles forment une partition de l'ensemble initial.

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

- ⇒ Fléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

 - 5.3 Partition de E

- 5.3 Partition de E

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

Proposition - Partition de E

Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

- 5.3 Partition de E

Définition - Partition d'un ensemble

Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :

- leur réunion fait E
- leur intersection 2 à 2 est vide

Proposition - Partition de E

Si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration

Réciproque?

Remarque La réciproque est vraie

Lecon 23 - Relations (binaires) sur E^2

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

- 5.3. Partition de E

Réciproque?

Remarque La réciproque est vraie

Remarque Classes d'équivalence et dénombrement

⇒ Eléments extrêmes

Lecon 23 - Relations

(binaires) sur E^2

⇒ Relations d'équivalence

5.3 Partition de E

4 D > 4 同 > 4 豆 > 4 豆 > 豆 め Q (~

Réciproque?

Remarque La réciproque est vraie

Remarque Classes d'équivalence et dénombrement

Application Dénombrement et classe d'équivalence

⇒ Fléments extrêmes

Lecon 23 - Relations

(binaires) sur E^2

⇒ Relations d'équivalence

5.3 Partition de E

4 D > 4 同 > 4 豆 > 4 豆 > 豆 め Q (~

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
- ⇒ Relation d'équivalence

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
 - Majorants, minorants

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problemes
 - 2. Graphe
 - Relations hinaires
 - 4 Relation d'ordre

 - 4.1. Definitions
 - 4.2. Ordre total
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 -
 - . Relation
 - equivalence
 - Propriétés caractéristique
 - . Glasses d'equiva
 - 5.3. Partition de E

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
 - Majorants, minorants
 - Plus grand et plus petit élément

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problemes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
 - 4. Deletien diender
 - 4.1. Définitions

 - 4.3 Ordro nortial
 - 4.4 Fléments particulier
 - 4.4. Elements partici
 - . Relation
 - l'équivalence
 -

 - 5.3. Partition de ${\cal E}$

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
 - Majorants, minorants
 - Plus grand et plus petit élément
 - Borne supérieure et borne inférieure

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
- 4 Relation d'ordre
 - 4.4. D46-16---
 - 4.1. Definitions
 - 1.2 Ordro total
 - .3. Ordre partiel
 - .4. Eléments particuliers
 - 4.5 Ordre strict
- 5. Relation
- d'équivalence
 - 1 Propriétés aproptári
 - Classes d'équivale
- 3 Partition de E
- 3.3. Farmon de 25

Objectifs

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - 1. Problèmes
- 2. Graphe
- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
- or parameter
- 4.1. Definitions
- 4.2 Ordra total
- 1.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particuliers
- 1.4. Elements particuli
- . Relation
- d'équivalence
 - 1 Propriétés aprocté
 - Classes d'équivalence
 - 3 Partition de E
- 5.3. Partition de E

Objectifs

⇒ Relation d'équivalence

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- 3 Relations hinaire
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 1.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particulie
- 4.4. Elements particulier
- . Relation
- l'équivalence
 - Propriétés oprost
 - Classes d'équivale
- n Danisian de 12
- 5.3. Partition de E

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
- ⇒ Relation d'équivalence
 - ► Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
 - 4 Relation d'ordre
 - 4.1. Definitions
 - 4.2 Ordra total
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
 - 5. Relation
 - d'équivalence
 - 1. Propriétés caractéristiques
 - Classes d'équivale
 - 5.3. Partition de E

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
- ⇒ Relation d'équivalence
 - ► Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie
 - Différents exemple =(ensembles) ou =(nombres), ⇔ ou ≡...

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problèmes
 - 2. Graphe
 - 3. Relations binaires
 - 4 Relation d'ordre
 - i. Helation a orale
 - .1. Définitions
 -
 - 4.3. Ordre partiel
 - 4.4. Eléments particuliers
 - 4.5. Ordre strict
 - . Relation
 - d'équivalence
 - . Propriétés caractéristiqu
 - 2. Classes d'équival
 - 5.3. Partition de ${\cal E}$

⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre

- ⇒ Relation d'équivalence
 - ► Relation d'équivalence : reflexivité, transitivité, symétrie
 - Différents exemple =(ensembles) ou =(nombres), ⇔ ou ≡...
 - Elargissement de l'égalité. Classe d'équivalence : ces sont les mêmes (mais notés différemment...)

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence
 - I. Problèmes
 - 2. Grapne
 - 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - .1. Définitions
- 40.0.1....
- 4.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particulier
 - .5. Ordre strict
 - . Relation
- d'équivalence
 - . Propriétés caractéristic
 - Classes d'équivale
- 5.3. Partition de E

- ⇒ Eléments extrêmes
- ⇒ Relations d'équivalence

Objectifs

- ⇒ Elements extrêmes pour une relation d'ordre
- ⇒ Relation d'équivalence

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 11 Application entre ensembles
- Exercice n°266 & 268

-
- L. Grapho
- Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
 - ____
 - 1. Définitions
 - I.2. Ordre total
 - I.3. Ordre partiel
- 4.4. Eléments particuliers
- 5. Relation
- d'équivalence
 - Propriétés caractéristiqu
 - Ciasses d'equivi
- 5.3. Partition de E