Leçon 25 - Applications (entre ensembles)

10 octobre 2025

⇒ Images directes et réciproque

⇒Indicatrice d'ensemble

⇒ **Images directes et réciproque**

⇒**Indicatrice d'ensemble**

Et si les applications ne sont pas bijectives

Heuristique - Si les applications ne sont pas bijectives

Si $f : E \to F$ n'est pas bijective, peut-on néanmoins trouver « comme » une application réciproque.
On a vu que tout n'est pas perdu, à condition de limiter l'ensemble de départ (pour tenter de gagner l'injectivité) et de réduire l'ensemble d'arrivée (pour gagner la surjectivité).
Dans le premier cas, on s'intéressera à l'ensemble réciproque de F par f, c'est un sous-ensemble de E.
Dans le second cas, on s'intéressera à l'ensemble image de E par f, c'est un sous-ensemble de F.

Image directe

Définition - Ensemble image

Soit $f : E \to F$ une application.
L'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par f est une partie de F appelée ensemble image ou image de f et notée $\mathrm{Im}\, f$ ou parfois $f(E)$:

$$\mathrm{Im}\, f = \{y \in F \mid \exists x \in E ; y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

Voir

Avec un diagramme sagittal :

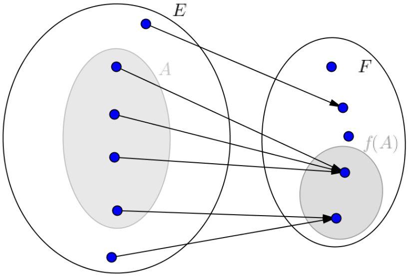


Image directe

Remarque Autre écriture

Image directe

Remarque Autre écriture

Savoir-faire. Critère de surjectivité. Création de fonction surjective

On a donc

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = F$$

Et toute application $f : E \to F$ définit une surjection en restreignant l'ensemble d'arrivée, c'est à dire en considérant l'application de E dans $\mathrm{Im}\, f$ qui a x associe $f(x)$ (que l'on continue usuellement à noter f, on dit alors que f est surjective de E sur $\mathrm{Im}\, f$).

Image directe

Définition - Image directe

Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle image (directe) de A par f la partie de F, notée $f(A)$, définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Image directe

Définition - Image directe

Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle image (directe) de A par f la partie de F, notée $f(A)$, définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Remarque Autres notations en exploitant $\mathrm{Im}\ f$

Image directe

Définition - Image directe

Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle image (directe) de A par f la partie de F, notée $f(A)$, définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A ; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x) ; x \in A\}.$$

Remarque Autres notations en exploitant $\mathrm{Im}\ f$

Savoir-faire. Montrer que $y \in f(A)$

Pour montrer que $y \in f(A)$ il faut trouver $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Ensemble image et stabilité

Proposition - Stabilité et image

Soit $f : E \to F$ une application et $A_1, A_2 \subset E$. Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Ensemble image et stabilité

Proposition - Stabilité et image

Soit $f : E \to F$ une application et $A_1, A_2 \subset E$. Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Démonstration

Ensemble image et stabilité

Proposition - Stabilité et image

Soit $f : E \to F$ une application et $A_1, A_2 \subset E$. Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Démonstration

Attention. Une seule inclusion pour l'intersection !

On fera bien attention qu'il n'y a pas l'égalité :

$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

Pour se convaincre on peut penser au cas où $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Par exemple, avec $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = [-2, -1]$ et $A_2 = [1, 2]$,

alors $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, et

$f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4] \cap [1, 4] = [1, 4]$

Application induite

Définition - Partie stable et application induite

Soit $f : E \to E$ une application. On dit qu'une partie A de E est stable par f si $f(A) \subset A$.
On appelle application induite par f sur A l'application

$$\begin{aligned} A &\to A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Application induite

Définition - Partie stable et application induite

Soit $f:E\to E$ une application. On dit qu'une partie A de E est stable par f si $f(A)\subset A$.
On appelle application induite par f sur A l'application

$$\begin{aligned} A &\to A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple Point fixe

$\Rightarrow$ Images directes et réciproque

$\Rightarrow$Indicatrice d'ensemble

Image réciproque d'un ensemble

Définition - Image réciproque

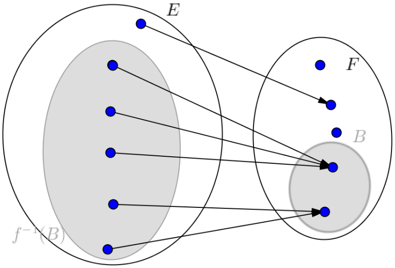
Soient $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f la partie de E, notée $f^{-1}(B)$ (ou $[f \in B]$, en proabilité), définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

C'est donc l'ensemble formé des antécédents par f des éléments de B.

Voir

Avec un diagramme sagittal :



Exemple d'image réciproque

Exemple Pour $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp x$

Exemple d'image réciproque

Exemple Pour $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp x$

Attention - Ne pas confondre la fonction f^{-1} et l'ensemble $f^{-1}(B)$

Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que f soit bijective. (voir l'exemple précédent)

Exemple d'image réciproque

Exemple Pour $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp x$

Attention - Ne pas confondre la fonction f^{-1} et l'ensemble $f^{-1}(B)$

Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que f soit bijective. (voir l'exemple précédent)

Savoir-faire. Montrer que $x \in f^{-1}(B)$

Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$ il faut et il suffit de montrer que $f(x) \in B$.

Exemples d'application

Exemple Fonction $\sin$

Soit

$$f : \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

Déterminer, si cela a un sens : $f(0)$; $f(\{0\})$; $f([0,\pi[)$; $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(0)$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}([0,+\infty[)$.

Exemples d'application

Exemple Fonction $\sin$

Soit

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$$

Déterminer, si cela a un sens : $f(0)$; $f(\{0\})$; $f([0,\pi[)$; $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(0)$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}([0,+\infty[)$.

Remarque Et si f est bijective

Images réciproques et stabilité

Proposition - Stabilité et image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Images réciproques et stabilité

Proposition - Stabilité et image réciproque

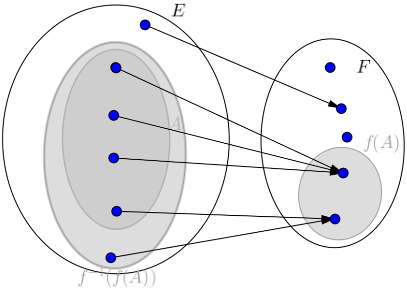
Soit $f : E \to F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Démonstration

Images réciproques et stabilité

Avec un diagramme sagittal :



Attention. $f^{-1}(f(A)) \neq A$ et $f(f^{-1})(B) \neq B$

Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité...
On a au mieux : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Images réciproques et stabilité

Attention. $f^{-1}(f(A)) \neq A$ et $f(f^{-1})(B) \neq B$

Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité...
On a au mieux : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice

Démontrer ces inclusions. Donner des contre-exemple de l'inclusion réciproque

⇒ Images directes et réciproque

⇒Indicatrice d'ensemble

Fonction indicatrice - définition

Définition - Fonction indicatrice

Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on appelle fonction indicatrice de A l'application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{1}_A$ ou χ_A, définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Fonction indicatrice - définition

Définition - Fonction indicatrice

Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on appelle fonction indicatrice de A l'application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{1}_A$ ou χ_A, définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Remarque Pourquoi et comment exploiter une telle fonction ?

⇒ Images directes et réciproque

⇒Indicatrice d'ensemble

Calcul

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient A et B deux parties de E. Alors

$$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

Calcul

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient A et B deux parties de E. Alors

$$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

<u>Exercice</u>

$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Que vaut $\mathbb{1}_{A\Delta B}$?

En déduire : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Calcul

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient A et B deux parties de E. Alors

$$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

Exercice

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Que vaut $\mathbb{1}_{A \Delta B}$?

En déduire : $(A \Delta B)\Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Démonstration

Calcul

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient A et B deux parties de E. Alors

$$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction indicatrice);}$$

$$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A;$$

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B;$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B.$$

<u>Exercice</u>

$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Que vaut $\mathbb{1}_{A\Delta B}$?

En déduire : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Démonstration

On retrouve évidemment des résultats comparables à ceux vus en logique...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

$\Rightarrow$ Indicatrice

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$.
- f surjective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$.
- f surjective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$.
- Stabilité (ou inclusion) des images

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$.
- f surjective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$.
- Stabilité (ou inclusion) des images
- Définition de $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$,

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\ f = \{f(x), x \in E\}$.
- f surjective ssi $\mathrm{Im}\ f = F$.
- Stabilité (ou inclusion) des images
- Définition de $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$,
- C'est un ensemble et non application.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

- Définition de $\mathrm{Im}\, f = \{f(x), x \in E\}$.
- f surjective ssi $\mathrm{Im}\, f = F$.
- Stabilité (ou inclusion) des images
- Définition de $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$,
- C'est un ensemble et non application.
- Stabilité (ou inclusion) des images réciproques

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

$\Rightarrow$ Indicatrice

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

$\Rightarrow$ Indicatrice

- $\mathbb{1}_A(x) = 1 \iff x \in A.$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

$\Rightarrow$ Indicatrice

- $\mathbb{1}_A(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A$.
- Calcul : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

$\Rightarrow$ Indicatrice

- $\mathbb{1}_A(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A.$
- Calcul : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
- Calcul des cardinaux...

Conclusion

Objectifs

⇒ Images directes et images réciproques d'ensembles par f

⇒ Indicatrice

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 11. Applications
  5. Cardinaux
  6. Familles
- Exercice n°248 & 249