Leçon 26 - Applications (entre ensembles)

14 octobre 2025

⇒ Ensembles de cardinaux finis

⇒Applications de la notion de famille

⇒ Ensembles de cardinaux finis

⇒Applications de la notion de famille

Lemmes

Nous considérons ici que l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien connu. Nous expliquerons dans un chapitre suivant sa construction, en attendant, il nous faut savoir que c'est l'ensemble d'appui du raisonnement par récurrence. . ..
On rappelle que l'on note $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots k-1, k\}$, l'ensemble des k premiers entiers naturels non nuls.
On commence par deux lemmes.

Principe des tiroirs

Lemme - Injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$. Principe des tiroirs (Dirichlet)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leqslant p$.

Sous sa forme contraposée : si $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ avec $n > p$,

Alors il existe $x \neq x' \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non injective).

Principe des tiroirs

Lemme - Injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$. Principe des tiroirs (DIRICHLET)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leqslant p$.

Sous sa forme contraposée : si $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ avec $n > p$,

Alors il existe $x \neq x' \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non injective).

Démonstration

⇒ **Ensembles de cardinaux finis**

⇒**Applications de la notion de famille**

Relation d'équivalence

Lemme - $\mathscr{R}$ comme relation d'équivalence

On note $\mathscr{R}$, la relation entre ensembles définies par :

$$E \mathscr{R} F \iff \exists\, \varphi : E \to F, \text{bijective}$$

$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Relation d'équivalence

Lemme - $\mathscr{R}$ comme relation d'équivalence

On note $\mathscr{R}$, la relation entre ensembles définies par :

$$E \mathscr{R} F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \varphi : E \to F, \text{bijective}$$

$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

On étudiera précisément les relations d'équivalence au chapitre suivant.
A savoir, elles sont : *réflexives, symétriques* et *transitives*.

Relation d'équivalence

Lemme - $\mathscr{R}$ comme relation d'équivalence

On note $\mathscr{R}$, la relation entre ensembles définies par :

$$E \mathscr{R} F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \varphi : E \to F, \text{bijective}$$

$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

On étudiera précisément les relations d'équivalence au chapitre suivant.

A savoir, elles sont : *réflexives, symétriques* et *transitives*.

Démonstration

Cardinal d'un ensemble (fini)

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n (\in \mathbb{N})$, si $E \mathscr{R} \mathbb{N}_n$.
On note $\text{Card}(E) = n$
On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

Cardinal d'un ensemble (fini)

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.

Soit $n\in\mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n(\in\mathbb{N})$, si $E\,\mathscr{R}\,\mathbb{N}_n$.
On note $\text{Card}(E)=n$
On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

Exemple Cardinal de $E=\{1,2,\dots k\}$

Cardinal d'un ensemble (fini)

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n (\in \mathbb{N})$, si $E \mathscr{R} \mathbb{N}_n$.
On note $\mathrm{Card}(E) = n$
On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

Exemple Cardinal de $E = \{1, 2, \dots k\}$

Exercice

Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n < p$, alors on n'a pas $\mathbb{N}_n \mathscr{R} \mathbb{N}_p$.

Classe d'équivalence. Invariant

Proposition - Classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$

On a l'équivalence : $E\,\mathscr{R}\,F \Longleftrightarrow \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.
Les classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ sont formé des ensembles de même cardinaux.
On peut les *paramétrer* par leur cardinaux

⇒ **Ensembles de cardinaux finis**

⇒**Applications de la notion de famille**

Indicatrice et calcul

Proposition - Calcul avec l'indicatrice

Soit E, un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.
Alors le calcul $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ a un sens et il vaut $\mathrm{Card}(A)$.

Indicatrice et calcul

Proposition - Calcul avec l'indicatrice

Soit E, un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.
Alors le calcul $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ a un sens et il vaut $\mathrm{Card}(A)$.

Démonstration

Indicatrice et calcul

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B (\subset E)$, avec E un ensemble fini.
Alors $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$.

Indicatrice et calcul

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B (\subset E)$, avec E un ensemble fini.
Alors $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(B)$.

Démonstration

Indicatrice et calcul

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B (\subset E)$, avec E un ensemble fini.
Alors $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(B)$.

Démonstration

Exercice

Soient E, un ensemble fini de cardinal n et F, un ensemble fini de cardinal m.

1. On suppose que $f : E \to F$ est une application injective.
   1.1 Montrer que $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal n.
   1.2 Montrer que $n \leqslant m$.
2. Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles E et F finis.

$$\exists\ i : E \to F, j : F \to E \text{ injectives} \Longrightarrow \exists\ b : E \to F \text{ bijective}$$

Bilan

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité

Si E et F sont des ensembles finis.
S'il existe une fonction $f : E \to F$ injective,
alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ (la réciproque est vraie).
S'il existe une fonction $f : E \to F$ sujective,
alors $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ (la réciproque est vraie).

Bilan

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité

Si E et F sont des ensembles finis.
S'il existe une fonction $f : E \to F$ injective,
alors $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$ (la réciproque est vraie).
S'il existe une fonction $f : E \to F$ sujective,
alors $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ (la réciproque est vraie).

Démonstration

⇒ Ensembles de cardinaux finis

⇒Applications de la notion de famille

Définition

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Définition

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Définition - Familles

Soient I et E deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute "liste" (finie ou non, avec répétitions éventuelles), notée $(a_i)_{i\in I}$, telle qu'à tout élément de I (appelé indice) soit associé un unique élément a_i de E (appelé terme d'indice i de la famille).
Cette famille peut donc être considérée comme l'application

$$a: \begin{array}{l} I \to E \\ i \mapsto a_i = a(i) \end{array}$$

Sous-famille, sur-famille

Définition - Sous famille

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.
Si $J \subset I$, on dit que $(a_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$.
on dit également que $(a_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i\in J}$.

Sous-famille, sur-famille

Définition - Sous famille

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.
Si $J \subset I$, on dit que $(a_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$.
on dit également que $(a_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i\in J}$.

Exemple $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$

Intersection et réunion

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.
On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}$.
On note
$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Intersection et réunion

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.
On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}$.
On note
$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Exemple $E = \mathbb{R}$

Intersection et réunion

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.
On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}$.
On note
$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.

Exemple $E = \mathbb{R}$

Exercice

On dit que la suite numérique (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| < \epsilon$$

1. Montrer que $|u_n - \ell| < \epsilon \Longleftrightarrow \ell \in]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[$.
2. En déduire que l'ensemble des limites possibles pour la suite (u_n) est l'intersection d'une réunion d'intersection d'ensembles

⇒ **Ensembles de cardinaux finis**

⇒**Applications de la notion de famille**

Vocabulaire de base sur les suites (infinies)

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou autre chose ($\mathscr{M}_p(\mathbb{R})\ldots$).
Par la suite nous pourrons avoir besoin que l'ensemble E soit ordonné.

Vocabulaire de base sur les suites (infinies)

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou autre chose ($\mathscr{M}_p(\mathbb{R})\dots$).
Par la suite nous pourrons avoir besoin que l'ensemble E soit ordonné.

Définition - Suite et ensemble de suites

Soit E un ensemble.
Une suite est une application $u : \mathbb{N} \to E$ (on dira aussi qu'une application de $\{n \in \mathbb{N} | n \geqslant n_0\}$ dans E où $n_0 \in \mathbb{N}$ est une suite).
On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{(éventuellement } (u_n)_{n\geqslant n_0}\text{) ou } (u_n)$$

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Lien avec les suites

Attention. Avec ou sans parenthèses

(u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou $n+1$-ième terme de la suite).

Lien avec les suites

Attention. Avec ou sans parenthèses

(u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou $n+1$-ième terme de la suite).

Exemple Suite (ou famille) de fonctions

Lien avec les suites

Attention. Avec ou sans parenthèses

(u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou $n+1$-ième terme de la suite).

Exemple Suite (ou famille) de fonctions

Heuristique. Particularité des suites aux familles

L'ensemble d'indexation des suites $\mathbb{N}$ a une particularité très importante que n'a pas I.
Il est ordonné naturellement. Ainsi, une notion importante des suites qui n'existe pas pour les familles est la notion de suite croissante que l'on verra un peu plus bas ou encore des propriétés vraies à partir d'un certain rang.
Autre propriété : si $A \subset \mathbb{N}$, alors A est borné si et seulement si A est fini

. . .à partir d'un certain rang

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...

On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $p(n)$ soit vraie pour $n \geqslant n_0$.

. . .à partir d'un certain rang

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...

On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $p(n)$ soit vraie pour $n \geqslant n_0$.

<u>Exercice</u>

Montrer que si $p(n)$ est vraie à partir d'un certain rang alors elle est vraie p est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb{N}$ à préciser.

Extraction de suite

Analyse Suites extraites (sous-suite)

Extraction de suite

Analyse Suites extraites (sous-suite)

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Extraction de suite

Analyse Suites extraites (sous-suite)

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Exemple Suites extraites paires et impaires

Extraction de suite

Analyse Suites extraites (sous-suite)

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Exemple Suites extraites paires et impaires

Exercice Montrer que si $p(n)$ est vraie à partir d'un certain rang, elle est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb{N}$ à préciser.

Suite extraite et ensemble infini

Proposition - Suite extraite et ensemble infini

Considérons une famille de propriétés indexées par $\mathbb{N}$, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie }\}$. Alors
A est infinie si et seulement si $\exists\ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ est vraie.

Suite extraite et ensemble infini

Proposition - Suite extraite et ensemble infini

Considérons une famille de propriétés indexées par $\mathbb{N}$, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie }\}$. Alors
A est infinie si et seulement si $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ est vraie.

Démonstration

Suites bornées

On considère $E, \preceq$ un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq M$.
- minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \preceq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Suites bornées

On considère $E, \preceq$ un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq M$.
- minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \preceq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque Familles bornées, majorées...

Suites bornées

On considère $E, \preceq$ un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq M$.
- minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \preceq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque Familles bornées, majorées...

Exercice

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est une suite majorée.

Suites monotones

Définition - Suite croissante, décroissante

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- croissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq u_{n+1}$.
- décroissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preceq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Suites monotones

Définition - Suite croissante, décroissante

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- croissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq u_{n+1}$.
- décroissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preceq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple Deux suites monotones

Suites monotones

Définition - Suite croissante, décroissante

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- croissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preceq u_{n+1}$.
- décroissante
  si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preceq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple Deux suites monotones

Nous élargirons ces notions, lorsque nous nous concentrerons sur les suites numériques, une fois que $\mathbb{R}$ sera construit...

Conclusion

Objectifs

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Ensemble de cardinaux finis

- Lemme des tiroirs.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Ensemble de cardinaux finis

- Lemme des tiroirs.
- Bijection entre ensembles finis : même cardinal.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Ensemble de cardinaux finis

- Lemme des tiroirs.
- Bijection entre ensembles finis : même cardinal.
- Des ensembles de référence : $\mathbb{N}_p$, puis $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Ensemble de cardinaux finis

- Lemme des tiroirs.
- Bijection entre ensembles finis : même cardinal.
- Des ensembles de référence : $\mathbb{N}_p$, puis $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$
- Dans le cas fini, on peut exploiter les indicatrices et une somme...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Ensemble de cardinaux finis

$\Rightarrow$ Applications de la notion de famille

Conclusion

Objectifs

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

- Familles indexé sur un ensemble.

Conclusion

Objectifs

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

- Familles indexé sur un ensemble.
- Sur-famille et sous-famille. Applications aux intersection ou réunions

Conclusion

Objectifs

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

- Familles indexé sur un ensemble.
- Sur-famille et sous-famille. Applications aux intersection ou réunions
- Indexation sur $\mathbb{N}$: suites !

Conclusion

Objectifs

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Système linéaire
- Exercice n°254 & 256
- TD : Majorer/minorer !