

Leçon 26 - Applications (entre ensembles)

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- I.Problèmes
- 2. $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- Fonction indicatrice
 - . Cardinai Ioneomble fini
 - ensemble iiii
 - .1. Principe des tiroirs
- 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
- 5.3. Cardinal, fonctio indicatrice et somme
- 6. Familles
- 6.1. Familles quelconques

⇒Applications de la notion de famille

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
 - Problèmes
- $2. f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- Fonction indicatrice
 - ensemble fini
- 5.1. Principe des tiroirs
- 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
- 5.3. Cardinal, fonction
- indicatrice et som
- 6. Familles
- 6.1. Familles quelconqu
- 6.2. Famille indexée sur N.

1.Problèmes

- 2. Applications de E dans F
- 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble
- 4. Fonction indicatrice
- 5. Cardinal d'ensemble fini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
 - 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)
- 6. Familles
 - 6.1. Familles quelconques
 - 6.2. Famille indexée sur N. Suites

⇒Applications de la notion de famille

- a(1) a=1(n

4. Fonction

'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles de

même cardinal

idicatrice et somi

6. Familles

6.1. Familles quelconques

1.Problèmes

2. Applications de $\it E$ dans $\it F$

3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

4. Fonction indicatrice

5. Cardinal d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles de même cardina

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

.Problèmes

3. f(A). $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles d

même cardinal

licatrice et somme (

6. Familles

6.1. Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N Suites

Nous considérons ici que l'ensemble $\mathbb N$ est bien connu. Nous expliquerons dans un chapitre suivant sa construction, en attendant, il nous faut savoir que c'est l'ensemble d'appui du raisonnement par récurrence....

On rappelle que l'on note $\mathbb{N}_k=\{1,2,3,\dots k-1,k\}$, l'ensemble des k premiers entiers naturels non nuls.

On commence par deux lemmes.

5.1. Principe des tiroirs

Lemme - Injection de \mathbb{N}_n sur \mathbb{N}_p . Principe des tiroirs (DIRICHLET)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leq p$. Sous sa forme contraposée : si $\varphi: \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ avec n > p,

Alors il existe $x \neq x' \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non injective).

5.1. Principe des tiroirs

Lemme - Injection de \mathbb{N}_n sur \mathbb{N}_p . Principe des tiroirs (DIRICHLET)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leq p$. Sous sa forme contraposée : si $\varphi: \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ avec n > p, Alors il existe $x \neq x' \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non

injective).

Démonstration

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles

- 5.2 Classe des ensembles de mâme cardinal

- 1.Problèmes
- 2. Applications de E dans F
- 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble
- 4. Fonction indicatrice
- Cardinal d'ensemble fini

 - 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
- 6 Familles

Relation d'équivalence

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- acc a=1ca
- 4. Fonction
 - Cardinal
 - ensemble IIII
 - .1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
 - .3. Cardinal, fonction dicatrice et somme (finie)
- 6. Familles
- . r arrinos
- 6.2. Famille indexée sur N

Lemme - R comme relation d'équivalence

On note \mathcal{R} , la relation entre ensembles définies par :

 $E \mathcal{R} F \iff \exists \varphi : E \to F$, bijective

 \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- .. / . *D* -- r
- 4. Fonction
- 5. Cardinal d'ensemble fini
- 5.1 Principa des tirnire
- 5.1. Principe des tiroirs
- 5.2. Classe des ensembles de
- même cardinal
 - dicatrice et somme (fin
- Familles
- 6.1. Families quelconques
 6.2. Famille indexée sur N.

- Lemme R comme relation d'équivalence

On note \mathcal{R} , la relation entre ensembles définies par :

 $E \mathcal{R} F \iff \exists \varphi : E \to F$, bijective

 \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

On étudiera précisément les relations d'équivalence au chapitre suivant.

A savoir, elles sont : réflexives, symétriques et transitives.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- $2. f : E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
- d'ensemble fini
- .1. Principe des tiroirs
- 5.1. Principe des tiroirs

 5.2 Classe des ensembles de
- même cardinal
- 5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (finie
- Familles
- Familles quelcor
- 6.2. Famille indexée sur N.

Lemme - R comme relation d'équivalence

On note \mathcal{R} , la relation entre ensembles définies par :

 $E \mathcal{R} F \iff \exists \varphi : E \to F$, bijective

 \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

On étudiera précisément les relations d'équivalence au chapitre suivant.

A savoir, elles sont : réflexives, symétriques et transitives.

Démonstration

5.2. Classe des ensembles de même cardinal

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, si $E \mathcal{R} \mathbb{N}_n$. On note Card(E) = n

On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

5.2. Classe des ensembles de

mâme cardinal

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$

On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, si $E \mathcal{R} \mathbb{N}_n$. On note Card(E) = n

On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

Exemple Cardinal de $E = \{1, 2, \dots k\}$

4. Fonction

d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.1. Principe des tiroirs
 5.2. Classe des ensembles de

5.2. Classe des ensembles de même cardinal

Cardinal, fonction
dicatrice et somme (finie)

Familles

1. Familles quelcon

6.2. Famille indexée sur N

Définition - Ensemble de cardinal *n*. Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, si $E \mathcal{R} \mathbb{N}_n$. On note $\operatorname{Card}(E) = n$

On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.

Exemple Cardinal de $E = \{1, 2, \dots k\}$

Exercice

Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et n < p, alors on n'a pas $\mathbb{N}_n \mathscr{R} \mathbb{N}_p$.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles

Proposition - Classe d'équivalence pour ${\mathscr R}$

On a l'équivalence : $E \mathcal{R} F \iff \operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.

Les classes d'équivalence pour ${\mathcal R}$ sont formé des ensembles de même cardinaux.

On peut les paramétrer par leur cardinaux

- .Problèmes
- $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
 - 4. Fonction indicatrice
 - 5. Cardinal
 - Principe des tiroirs
 - 5.1. Principe des tiroirs

 5.2 Classe des ensembles de
 - même cardinal
 - dicatrice et somme (fini
 - Familles
 - 6.1. Familles quelconques 6.2 Famille indevée sur N

- ⇒Applications de la notion de famille
- 1.Problèmes
- 2. Applications de E dans F
- 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble
- 4. Fonction indicatrice
- 5. Cardinal d'ensemble fini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles de même cardina
 - 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)
- 6. Familles
 - 6.1. Familles quelconques
 - 6.2. Famille indexée sur N. Suites

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

Problèmes

 $f: E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

Classe des ensembles de

5.2. Classe des ensembles de même cardinal

 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

6. Familles

6.1. Familles quelconques 6.2 Famille indevée sur N



- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- \Rightarrow Familles

Proposition - Calcul avec l'indicatrice

Soit E, un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors le calcul $\sum_{x} \mathbb{I}_{A}(x)$ a un sens et il vaut $\operatorname{Card}(A)$.

- .Problèmes
- $f: E \to F$
- 3. f(A). $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
 - . Cardinal
 - ensemble iini
 - 2. Classe des ensembles de
- 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)
- 6. Familles
- o. ramilles
- 6.1. Familles quelconques
 6.2. Famille indexée sur N.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- \Rightarrow Familles
- 1.Problèmes
- $2. f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- Fonction indicatrice
 - 5. Cardinal
 - rensemble iini
 - 2. Classe des ensembles de
 - nême cardinal
 - 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)
- 6. Familles
- 6.1. Familles quelconq
- 6.2. Famille indexée sur N.

Proposition - Calcul avec l'indicatrice

Soit E, un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors le calcul $\sum_{x \in E} \mathbb{I}_A(x)$ a un sens et il vaut $\operatorname{Card}(A)$.

Démonstration

Indicatrice et calcul

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B \subset E$), avec E un ensemble fini. Alors $Card(A) \leq Card(B)$.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
 - Cardinal
 - ensemble fini
 - i.2. Classe des ensembles de
- même cardinal
 5.3. Cardinal, fonction
- indicatrice et somme (finie)
- . Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Indicatrice et calcul

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B \subset E$), avec E un ensemble fini. Alors $Card(A) \leq Card(B)$.

Démonstration

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
 - 4. Fonction indicatrice
 - Cardinal
 - ensemble fini
 - 2. Classe des ensembles de
 - 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)
 - 3. Familles
 - o. ramilles
- Families quelconques
 Familie indexée sur N.

Si $A \subset B \subset E$), avec E un ensemble fini.

Alors $Card(A) \leq Card(B)$.

Démonstration

Exercice

Soient E, un ensemble fini de cardinal n et F, un ensemble fini de cardinal m.

- 1. On suppose que $f: E \to F$ est une application injective.
 - 1.1 Montrer que f(E) est un ensemble fini de cardinal n.
 - 1.2 Montrer que $n \leq m$.
- 2. Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles *E* et *F* finis.

 $\exists i: E \to F, j: F \to E \text{ injectives} \Longrightarrow \exists b: E \to F \text{ bijective}$

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

Problèmes

 $2 \cdot f(A) \cdot f^{-1}(B)$

4. Fonction

. Cardinal

d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroin

5.2. Classe des ensembles de nême cardinal

 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

6. Familles

6.1. Familles quelconq

6.2. Famille indexée sur N.

5.3. Cardinal, fonction

indicatrice et somme (finie)

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité

Si E et F sont des ensembles finis.

S'il existe une fonction $f: E \to F$ injective, alors $Card(E) \leq Card(F)$ (la réciproque est vraie).

S'il existe une fonction $f: E \to F$ sujective, alors $Card(F) \leq Card(E)$ (la réciproque est vraie).

4. Fonction

5. Cardinal

l'ensemble fini

Principe des tiroirs
 Classo des appomble

.2. Classe des ensembles de iême cardinal

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

Familles

6.1. Familles quelconq

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité

Si E et F sont des ensembles finis.

S'il existe une fonction $f: E \to F$ injective, alors $\operatorname{Card}(E) \leqslant \operatorname{Card}(F)$ (la réciproque est vraie).

S'il existe une fonction $f: E \to F$ sujective, alors $Card(F) \le Card(E)$ (la réciproque est vraie).

Démonstration

- - cardinaux finis
 ⇒Familles

⇒ Ensemble de

- .Problèmes
- $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(A)$
- 4. Fonction indicatrice
 - Gardinal ensemble fini
 - ensemble fini
 - 1. Principe des tiroirs
- 5.2. Classe des ensembles de même cardinal
- 5.3. Cardinal, fonction
- ndicatrice et somme (
- 6. Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N.

⇒Applications de la notion de famille

- 1.Problèmes
- 2. Applications de E dans F
- 3. Image directe, image réciproque d'un ensemble
- 4. Fonction indicatrice
- 5. Cardinal d'ensemble fini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles de même cardina
 - 5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie
- 6 Familles
 - 6.1. Familles quelconques
 - 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

1.Problèmes

2. | .E → r

4. Fonction

Cardinal

ensemble fini

. Principe des tiroirs

.2. Classe des ensembles d

I. Cardinal, fonction

Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N

i ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

i.2. Classe des ensembles de nême cardinal

Cardinal, fonction
dicatrice et somme (fir

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N.

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Définition - Familles

Soient I et E deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute "liste" (finie ou non, avec répétitions éventuelles), notée $(a_i)_{i\in I}$, telle qu'à tout élément de I (appelé indice) soit associé un unique élément a_i de E (appelé terme d'indice i de la famille).

Cette famille peut donc être considérée comme l'application

$$a: I \rightarrow E$$

$$i \mapsto a_i = a(i)$$

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- .Problèmes
- 2. Ţ : Ŀ → F
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
 - . Cardinal
 - insemble fini
 - . Principe des tiroirs
 - i.2. Classe des ensembles de nême cardinal
 - .3. Cardinal, fonction
 - . Familles
 - 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N.

Définition - Sous famille

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E. Si $J\subset I$, on dit que $(a_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$. on dit également que $(a_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i\in J}$.

.Problèmes

 $E. f: E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

d'ensemble fini

ensemble fini

Principe des tiroirs

 Classe des ensembles de me cardinal

 Cardinal, fonction ficatrice et somme (fir

. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N

Définition - Sous famille

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E. Si $J\subset I$, on dit que $(a_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$. on dit également que $(a_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i\in J}$.

Exemple $E=\mathbb{R}$ et $I=\mathbb{N}$

Intersection et réunion

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.

On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}.$

On note

 $\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \forall i\in I, x\in A_i\} \text{ et } \bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \exists i\in I, x\in A_i\}.$

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

1.Problèmes

4. Fonction indicatrice

. Cardinal

Principe des tiroirs

2. Classe des ensembles de

t. Cardinal, fonction

Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N

Intersection et réunion

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.

On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}.$

On note

 $\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \forall i\in I, x\in A_i\} \text{ et } \bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \exists i\in I, x\in A_i\}.$

Exemple $E=\mathbb{R}$

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

.Problèmes

.. / . E - F

4. Fonction indicatrice

. Cardinal

ensemble fini

Principe des tiroirs

2. Classe des ensembles de lme cardinal

 Cardinal, fonction dicatrice et somme (

Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N.

⇒ Ensemble de

2. $f: E \to F$ 3. $f(A) = f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

l'ensemble fini

d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

 5.2. Classe des ensembles de même cardinal

5.3. Cardinal, fonction

Famillac

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.

On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}$.

On note

 $\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \forall i\in I, x\in A_i\} \text{ et } \bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in E\mid \exists i\in I, x\in A_i\}.$

Exemple $E = \mathbb{R}$

Exercice

On dit que la suite numérique (u_n) converge vers ℓ si :

 $\forall \ \epsilon > 0, \exists \ N \in \mathbb{N} \mid \forall \ n \ge N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon$

- 1. Montrer que $|u_n \ell| < \epsilon \iff \ell \in]u_n \epsilon, u_n + \epsilon[$.
- 2. En déduire que l'ensemble des limites possibles pour la suite (u_n) est l'intersection d'une réunion d'intersection d'ensembles

3. Image directe, image réciproque d'un ensemble

4. Fonction indicatrice

5. Cardinal d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles de même cardina

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

Problémes

 $f: E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

. Principe des tiroirs

même cardinal

5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (

6. Familles

6.1 Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N. Suites $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou autre chose $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \ldots)$.

ordonné.

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être

Par la suite nous pourrons avoir besoin que l'ensemble E soit

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

1.Problèmes

2. $f: E \to F$ 2. $f(A) = f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

2. Classe des ensembles de

.3. Cardinal, fonction

Familles

6.1. Familles quelconque

 6.2. Famille indexée sur N. Suites

4. Fonction

5. Cardinal

d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classo des appembles

 5.2. Classe des ensembles de même cardinal

i.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (

Familles

6.1. Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N.

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} ou autre chose $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), ...)$.

Par la suite nous pourrons avoir besoin que l'ensemble ${\cal E}$ soit ordonné.

Définition - Suite et ensemble de suites

Soit E un ensemble.

Une suite est une application $u:\mathbb{N}\to E$ (on dira aussi qu'une application de $\{n\in\mathbb{N}|n\geqslant n_0\}$ dans E où $n_0\in\mathbb{N}$ est une suite). On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
 (éventuellement $(u_n)_{n\geqslant n_0}$) ou (u_n)

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Attention. Avec ou sans parenthèses

 (u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou n+1-ième terme de la suite).

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- $E. f: E \to F$
- 4. Fonction
 - Cardinal
 - ensemble fini
 - Principe des tiroirs
 Classe des ensembles de
- 6.2. Classe des ensembles de nême cardinal
- 5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (
- 6. Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Attention. Avec ou sans parenthèses

 (u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou n+1-ième terme de la suite).

Exemple Suite (ou famille) de fonctions

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- .Problèmes
- $2. f : E \to F$
- 4. Fonction
 - Caudinal
 - ensemble fini
 - Principa dos tirnire
 - i.2. Classe des ensembles de
 - 5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (
 - 6. Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Attention. Avec ou sans parenthèses

 (u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou n+1-ième terme de la suite).

Exemple Suite (ou famille) de fonctions

Heuristique. Particularité des suites aux familles

L'ensemble d'indexation des suites $\mathbb N$ a une particularité très importante que n'a pas I.

Il est ordonné naturellement. Ainsi, une notion importante des suites qui n'existe pas pour les familles est la notion de suite croissante que l'on verra un peu plus bas ou encore des propriétés vraies à partir d'un certain rang.

Autre propriété : si $A \subset \mathbb{N}$, alors A est borné si et seulement si A est fini

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

Problèmes

4. Fonction

4. Fonction indicatrice

l'ensemble fini

ensemble iiii

5.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles de nême cardinal

 Cardinal, fonction dicatrice et somme

. Familles

6.1. Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N.

 5.2. Famille indexée sur N. Suites

⇒Familles

1.Problèmes

 $2. f: E \to F$

4. Fonction

. Cardinal

ensemble fini

Principe des tiroirs
 Classe des appombles des

 Classe des ensembles de ême cardinal

3. Cardinal, fonction dicatrice et somme (f

. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...

On dit qu'une propriété p(n) est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété p(n) soit vraie pour $n \ge n_0$.

.Problèmes

2. $f: E \to F$ 2. $f(A) f^{-1}(B)$

4. Fonction

o. Cardinal L'ansamble fini

d ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

i.2. Classe des ensembles de

3. Cardinal, fonction

Famillas

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...

On dit qu'une propriété p(n) est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété p(n) soit vraie pour $n \ge n_0$.

Exercice

Montrer que si p(n) est vraie à partir d'un certain rang alors elle est vraie p est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb N$ à préciser.

Extraction de suite

Analyse Suites extraites (sous-suite)

Leçon 26 -Applications (entre ensembles)

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- 1.Problèmes
- $2. f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction
 - Cardinal
 - ensemble fini
 - .1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles de nême cardinal
 - i.3. Cardinal, fonction
 - . Familles
- 6.1 Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

- 1.Problèmes
- $2. f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
 - 4. Fonction indicatrice
 - d'ensemble fini
 - 1 Principa des tiraira
 - Principe des tiroirs
 Classe des ensembles
 - nême cardinal
 - 5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (
 - . Familles
 - 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Exemple Suites extraites paires et impaires

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

.Problèmes

 $2. f: E \to F$

4. Fonction

indicatrice

'ensemble fini

Principe des tiroirs

2. Classe des ensembles

ême cardinal
3. Cardinal, fonction

ndicatrice et somme (

Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N.

Suites



Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Exemple Suites extraites paires et impaires <u>Exercice</u> Montrer que si p(n) est vraie à partir d'un certain rang, elle est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb N$ à préciser.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

.Problèmes

 $2. f : E \to F$

4. Fonction

indicatrice

ensemble fini

ensemble fini

5.2. Classe des ensembles

nême cardinal i.3. Cardinal, fonction

indicatrice et somme

. Familles

i.1. Familles quelconque

⇒Familles

1.Problèmes

2. / . E → F

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

5. Cardinal

rensemble iiii

. Principe des tiroirs

 Classe des ensembles de ême cardinal

.3. Cardinal, fonction

icatrice et somme

. Familles

S.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Proposition - Suite extraite et ensemble infini

Considérons une famille de propriétés indexées par \mathbb{N} , notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie }\}.$ Alors

A est infinie si et seulement si $\exists \ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall \ n \in \mathbb{N}, P_{\varphi(n)}$ est vraie.

⇒Familles

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Proposition - Suite extraite et ensemble infini

Considérons une famille de propriétés indexées par N, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie }\}$. Alors A est infinie si et seulement si $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{\varphi(n)}$ est vraie.

Démonstration

 $2. f : E \to F$

4. Fonction

l'ensemble fini

Tensemble fini

1. Principe des tiroirs

2. Classe des ensembles de ême cardinal

t. Cardinal, fonction

. Familles

6.1. Familles quelconques

 6.2. Famille indexée sur N. Suites

On considère E, \leq un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- ▶ majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- ▶ minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

⇒Familles

.Problèmes

2. $f: E \to F$

4. Fonction

5. Cardinal

'ensemble fini

Principe des tiroirs

i.2. Classe des ensembles de nême cardinal

3. Cardinal, fonction

Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N.
 Suites

On considère E, \leq un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- ▶ majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- ▶ minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque Familles bornées, majorées...

2. $f: E \to F$ 2. $f(A) = f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

d'ensemble fini

Principe des tiroirs
 Classe des ensemble

i.2. Classe des ensembles de nême cardinal

 Cardinal, fonction dicatrice et somme (f

. Familles

6.1. Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N. Suites

On considère E, \leq un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- ▶ majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- ▶ minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque Familles bornées, majorées...

Exercice

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est une suite majorée.

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- roissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

.Problèmes

 $f:E\to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

5. Cardinal

rensemble fini

Principe des tiroirs
 Classe des ensemble

i.2. Classe des ensembles de nême cardinal

 Cardinal, fonction dicatrice et somme (fi

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- roissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple Deux suites monotones

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

Problèmes

 $f:E\to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

'ensemble fini

5.1 Principa des tirnire

Classe des ensemble

ême cardinal

3. Cardinal, fonction

dicatrice et somme (f

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

Définition - Suite croissante, décroissante

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple Deux suites monotones

Nous élargirons ces notions, lorsque nous nous concentrerons sur les suites numériques, une fois que ℝ sera construit...

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

1.Problèmes

- 2. $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
 - Cardinal
 - ensemble iini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - Classe des ensembles de même cardinal
 - i.3. Cardinal, fonction
 - . Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
 - Lemme des tiroirs.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

1.Problèmes

 $2. f: E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

.1. Principe des tiroirs

 5.2. Classe des ensembles de même cardinal

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (f

. Familles

6.1. Familles quelconques

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
 - Lemme des tiroirs.
 - Bijection entre ensembles finis : même cardinal.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

I.Problèmes

 $2. f: E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

.1. Principe des tiroirs

 Classe des ensembles de même cardinal

5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (

6. Familles

6.1. Familles quelconque

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
 - Lemme des tiroirs.
 - Bijection entre ensembles finis : même cardinal.
 - ▶ Des ensembles de référence : \mathbb{N}_p , puis \mathbb{N} ou \mathbb{R}

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

I.Problèmes

2. Ţ : Ł → F

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

ensemble fini

1 Principa des tirnire

5.2. Classe des ensembles d

3. Cardinal, fonction

Familles

6.1. Familles quelconqu

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
 - Lemme des tiroirs.
 - Bijection entre ensembles finis : même cardinal.
 - ▶ Des ensembles de référence : \mathbb{N}_p , puis \mathbb{N} ou \mathbb{R}
 - ▶ Dans le cas fini, on peut exploiter les indicatrices et une somme...

⇒Familles

I.Problèmes

 $2. f: E \to F$

4. Fonction

5. Cardinal d'ensemble fini

Bringing destiraire

Principe des tiroirs
 Classe des ensemble.

me cardinal . Cardinal, fonction

licatrice et somme (

6. Familles

6.1. Familles quelconque

6.2. Famille indexée sur N. Suites

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒ Applications de la notion de famille

1.Problèmes

- 2. $f: E \to F$
- 3. f(A), $f^{-1}(B)$
- 4. Fonction indicatrice
 - Cardinal
 - ensemble iini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - Classe des ensembles de même cardinal
 - i.3. Cardinal, fonction
 - . Familles
- 6.1. Familles quelconques
- 6.2. Famille indexée sur N.

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒ Applications de la notion de famille
 - Familles indexé sur un ensemble.

⇒ Ensemble de cardinaux finis

⇒Familles

1.Problèmes

 $f \cdot E \to F$

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

i.1. Principe des tiroirs

5.2. Classe des ensembles de nême cardinal

i.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (

6. Familles

6.1. Familles quelconques

6.2. Famille indexée sur N. Suites

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒ Applications de la notion de famille
 - Familles indexé sur un ensemble.
 - Sur-famille et sous-famille. Applications aux intersection ou réunions

⇒Familles

I.Problèmes

2. Ţ : Ŀ → F

3. f(A), $f^{-1}(B)$

4. Fonction indicatrice

Cardinal

ensemble fini

1. Principe des tiroirs
 2. Classe des ensembles

nême cardinal

5.3. Cardinal, fonction ndicatrice et somme (

6. Familles

6.1. Familles quelconques

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis.
- ⇒ Applications de la notion de famille
 - Familles indexé sur un ensemble.
 - Sur-famille et sous-famille. Applications aux intersection ou réunions
 - Indexation sur N : suites!

⇒Familles

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒Familles
- .Problèmes
- 1
- 4 Equation
- indicatrice
 - d'ensemble fini
 - 5.1. Principe des tiroirs
 - 5.2. Classe des ensembles d
 - i.3. Cardinal, fonction
 - Familias
 - 6. Familles
- 6.1. Familles quelconques
 6.2. Famille indexée sur N

- ⇒ Ensemble de cardinaux finis
- ⇒ Applications de la notion de famille

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 3. Système linéaire
- Exercice n°254 & 256
- ► TD : Majorer/minorer!