

DEVOIR SURVEILLÉ N°0

Sujet donné le samedi 13 septembre 2025, 2h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - LA BORNE DE CAUCHY

Dans ce problème, nous étudions un encadrement des modules des racines d'une fonction polynomiale en fonction de ses coefficients. Pour un ensemble E fini, on note $\text{card}(E)$, son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$, l'ensemble à p éléments pris dans l'ensemble $\mathbb{N}_n := \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple, pour $n = 4$, $\binom{\mathbb{N}_4}{0} = \{\emptyset\}$ alors que $\binom{\mathbb{N}_4}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Ce problème est composé de quatre parties. La première donne deux résultats utiles par la suite : la généralisation de l'inégalité triangulaire et la valeur de $\text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$. La deuxième partie donne un majorant de l'ensemble des racines d'un polynôme H qui a une forme particulière. Ce résultat est exploité dans deux applications en troisième partie. Et il est généralisé à toute forme de polynôme en quatrième partie. Cela se termine par un encadrement (majoration et minoration) des racines d'un polynôme quelconque en fonction de la borne de Cauchy.

I . Préliminaires. Relations sur les ensembles et inégalité triangulaire.

A. On admet que pour tout nombre complexe $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

I.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z_1, z_2 \dots z_n \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

B. On note, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$ (on rappelle que $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$ a été défini plus haut).

I.2. Donner la description complète de l'ensemble $\binom{\mathbb{N}_5}{3}$. On notera que cet ensemble est composée de 10 éléments.

I.3. Evaluer $C(0, 0) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_0}{0}\right)$, $C(1, 0) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_1}{0}\right)$ et $C(1, 1) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_1}{1}\right)$.

On notera que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.

I.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et E , un ensemble de p éléments pris dans $\mathbb{N}_{n+1}$. Montrer que :

ou bien $n+1 \in E$, et alors $E \setminus \{n+1\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{p-1}$, ou bien $n+1 \notin E$, et alors $E \in \binom{\mathbb{N}_n}{p}$.

(b) En déduire $C(n+1, p) = C(n, p-1) + C(n, p)$.

I.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \binom{n}{p}$.

II . Une première famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(c_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ n réels positifs, non tous nuls. On considère la fonction polynomiale

$$H : x \mapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

et on définit également $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-H(x)}{x^n}$.

- II.1. H est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xH'(x) = nx^n - \sum_{k=0}^{n-1} k c_k x^k$
- II.2. Etudier les variations de h et démontrer que h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- II.3. En déduire que la fonction polynomiale H admet une unique racine réelle strictement positive, notée α .
On exploitera le théorème de la bijection ou corollaire des valeurs intermédiaires, en énonçant et vérifiant chacune de ses hypothèses.
- II.4. Montrer que $H'(\alpha) \neq 0$, donc que α est une racine simple de H .
- II.5. Soit ζ une racine complexe de H . On va démontrer par l'absurde que nécessairement $|\zeta| \leq \alpha$.
Supposons que $|\zeta| > \alpha$. En évaluant le signe de $H(|\zeta|)$, montrer que $|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$.
- II.6. Montrer que cela conduit à une contradiction, puis conclure.

III . Deux applications

- III.1. Première application. Soit $H_1 : x \mapsto x^5 - x^4 - 2x^2 - x - 6$.
Evaluer $H_1(2)$. Que dire des racines de H_1 ? Combien de racines entières H_1 admet-il?
- III.2. Deuxième application. On considère $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$, puis $(a_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ m réels strictement positifs et

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

une fonction polynomiale de degré $m-1$.

On pose $\gamma = \max_{1 \leq i \leq m-1} \frac{a_{i-1}}{a_i}$, le plus grand rapport des termes consécutifs : $\frac{a_{i-1}}{a_i}$.

- (a) On note $F_\gamma : x \mapsto (x - \gamma)F(x)$.

Montrer que F_γ est une fonction polynomiale de degré m , puis que pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$[F_\gamma]_k = a_{k-1} - \gamma a_k$$

(avec les conventions : $a_m = 0$ et $a_{-1} = 0$.)

- (b) En déduire que $H : x \mapsto \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(x)$ vérifie exactement les hypothèses de la partie II.
En déduire que pour toute racine ζ de F , $|\zeta| \leq \gamma$

IV La borne de Cauchy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, un polynôme de degré n , à coefficients dans $\mathbb{C}$ et tel que les $(a_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ soient non tous nuls.

- IV.1. Montrer que l'équation d'inconnue $x : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$ notée (E) , possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de f et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

Puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \geq |a_n| x^n$ si et seulement si $x \leq \rho(f)$

- IV.2. Montrer que, pour tout racine complexe ζ de f , on a : $|\zeta| \leq \rho(f)$

- IV.3. Soit $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de f avec comme convention :

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

On a donc la factorisation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i)$.

- (a) On admet que pour tout nombres complexes $z_1, \dots, z_n$, $\prod_{i=1}^n (x - z_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket 1, n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} z_i \right) x^{n-k}$.

Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$

- (b) En déduire que : $\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$

- (c) En déduire que

$$(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

DEVOIR SURVEILLE 0

Correction

Ce sujet est inspiré très largement d'un sujet de l'université d'Angers : <https://math.univ-angers.fr/documents/09-ep2.pdf>

Dans ce problème, nous étudions un encadrement des modules des racines d'une fonction polynomiale en fonction de ses coefficients. Pour un ensemble E fini, on note $\text{card}(E)$, son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$, l'ensemble à p éléments pris dans l'ensemble $\mathbb{N}_n := \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple, pour $n = 4$, $\binom{\mathbb{N}_4}{0} = \{\emptyset\}$ alors que $\binom{\mathbb{N}_4}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Ce problème est composé de quatre parties. La première donne deux résultats utiles par la suite : la généralisation de l'inégalité triangulaire et la valeur de $\text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$. La deuxième partie donne un majorant de l'ensemble des racines d'un polynôme H qui a une forme particulière. Ce résultat est exploité dans deux applications en troisième partie. Et il est généralisé à toute forme de polynôme en quatrième partie. Cela se termine par un encadrement (majoration et minoration) des racines d'un polynôme quelconque en fonction de la borne de Cauchy.

I . Préliminaires. Relations sur les ensembles et inégalité triangulaire.

A. On admet que pour tout nombre complexe $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

I.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z_1, z_2 \dots z_n \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n : \ll \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \gg$.

— Pour $n = 1$. Soit $z_1 \in \mathbb{C}$. $\left| \sum_{k=1}^1 z_k \right| = |z_1| \leq |z_1| = \sum_{k=1}^1 |z_k|$.

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire appliquée à $Z = z_1 + \dots + z_n$ et $Z' = z_{n+1}$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = |Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}|$$

d'après l'hypothèse de récurrence appliquée en $z_1, \dots, z_n$. Ainsi, on retrouve l'inégalité recherchée.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ et tout } z_1, z_2 \dots z_n \in \mathbb{C}, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Notons que le cas $\mathcal{P}_0$ est également vraie : nous avons deux sommes vides. Elles valent zéro chacune.

B. On note, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$ (on rappelle que $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$ a été défini plus haut).

I.2. Donner la description complète de l'ensemble $\binom{\mathbb{N}_5}{3}$. On notera que cet ensemble est composée de 10 éléments.

$$\binom{\mathbb{N}_5}{3} = \left\{ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\} \right\}$$

I.3. Evaluer $C(0, 0) = \text{card}\binom{\mathbb{N}_0}{0}$, $C(1, 0) = \text{card}\binom{\mathbb{N}_1}{0}$ et $C(1, 1) = \text{card}\binom{\mathbb{N}_1}{1}$.

On notera que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.

Il y a un et un seul sous-ensemble à l'ensemble vide : l'ensemble vide lui-même. Donc $C(0, 0) = 1$.

Il y a un et un seul sous-ensemble à zéro élément pris dans $\mathbb{N}_1$: l'ensemble vide.

Et il y a un et un seul sous-ensemble à un élément pris dans $\mathbb{N}_1$: $\mathbb{N}_1$ lui-même.

$$C(0, 0) = 1, \quad C(1, 0) = 1, \quad C(1, 1) = 1$$

I.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et E , un ensemble de p éléments pris dans $\mathbb{N}_{n+1}$. Montrer que :

— ou bien $n+1 \in E$, et alors $E \setminus \{n+1\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{p-1}$

— ou bien $n+1 \notin E$, et alors $E \in \binom{\mathbb{N}_n}{p}$

En effet, les deux propriétés $n+1 \in E$ et $n+1 \notin E$ sont complémentaires.

Dans le premier cas, E est composé de p éléments pris dans $\mathbb{N}_{n+1}$, mais dont l'un est $n+1$.

Si on retire cet élément, l'ensemble $E \setminus \{n+1\}$ est alors un sous-ensemble de $p-1$ éléments pris dans $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{n+1\} = \mathbb{N}_n$.

Dans le second cas, E est composé de p éléments pris directement dans $\mathbb{N}_n$.

$$\text{Donc, ou bien } n+1 \in E, \text{ et alors } E \setminus \{n+1\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{p-1}, \text{ ou bien } n+1 \notin E, \text{ et alors } E \in \binom{\mathbb{N}_n}{p}.$$

(b) En déduire $C(n+1, p) = C(n, p-1) + C(n, p)$.

Pour chaque éléments de $\binom{\mathbb{N}_{n+1}}{p}$, on associe exactement un élément de $\binom{\mathbb{N}_n}{p-1}$ (si $n+1 \in E$) ou un élément de $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$.

Cette correspondance est bijective, on a donc

$$\text{card}\binom{\mathbb{N}_{n+1}}{p} = \text{card}\binom{\mathbb{N}_n}{p-1} + \text{card}\binom{\mathbb{N}_n}{p}$$

$$C(n+1, p) = C(n, p-1) + C(n, p)$$

I.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \binom{n}{p}$.

Nous allons conclure cette partie en démontrant le résultat recherché par récurrence.

On remarque d'abord que $C(0, 0) = 1 = \binom{0}{0}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n : \llbracket \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, C(n, p) = \binom{n}{p} \rrbracket$.

— La question 2. permet d'affirmer que $C(1, 0) = 1 = \binom{1}{0}$ et $C(1, 1) = 1 = \binom{1}{1}$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. D'après 3.(b)

$$C(n+1, p) = C(n, p-1) + C(n, p) \underset{\mathcal{P}_n}{=} \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \underset{\text{triangle de Pascal}}{=} \binom{n+1}{p}$$

$$\text{Et } C(n+1, 0) = \text{card}\{\emptyset\} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée, le cas $n = 0$ aussi. On peut donc affirmer

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \llbracket 0, n \rrbracket, C(n, p) = \binom{n}{p}.$$

II . Une première famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(c_i)_{i \in [0, n-1]}$ n réels positifs, non tous nuls. On considère la fonction polynomiale

$$H : x \mapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

et on définit également

$$h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-H(x)}{x^n}$$

II.1. H est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xH'(x) = nx^n - \sum_{k=0}^{n-1} kc_k x^k$

Pour tout $k \geq 1$, la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$ et pour $k = 0$, la dérivée est nulle.

Par dérivation de somme égale à la somme de dérivées : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = nx^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} c_k kx^{k-1}$.

Puis en multipliant par x : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \times H'(x) = nx^n - \sum_{k=1}^{n-1} kc_k x^k$.

Enfin, comme pour $k = 0$, $kc_k x^k = 0 \times c_0 \times 1 = 0$, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xH'(x) = nx^n - \sum_{k=0}^{n-1} kc_k x^k$$

II.2. Etudier les variations de h et démontrer que h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

La fonction h est une fraction rationnelle, elle est définie sur $]0, +\infty[$ sans aucun problème (son dénominateur ne s'annule pas).

Elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{-H'(x)x^n - (-H(x)) \times nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{nH(x) - xH'(x)}{x^{n+1}}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de $h'(x)$ est donc le même que celui de

$$nH(x) - xH'(x) = nx^n - \sum_{k=0}^{n-1} nc_k x^k - x(nx^{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k-n)c_k x^k$$

Or pour tout $k \leq n-1$, $k-n < 0$, $c_k \geq 0$ (par hypothèse de l'énoncé) et $x^k > 0$ (car $x > 0$).

Enfin, comme les réels (c_i) sont non tous nuls, au moins un $c_k > 0$ et donc pour ce k : $(k-n)c_k x^k < 0$ et ainsi par addition :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) < 0 \quad \text{donc } h \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[.$$

II.3. En déduire que la fonction polynomiale H admet une unique racine réelle strictement positive, notée α .

On exploitera le théorème de la bijection ou corollaire des valeurs intermédiaires, en énonçant et vérifiant chacune de ses hypothèses.

Pour tout $x > 0$, $H(x) = 0 \iff x^n \times h(x) = 0 \iff h(x) = 0$ (car $x \neq 0$).

Or h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, continue (fraction rationnelle ou car dérivable),

h établit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right[$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^n}{x^n} = -1$ (factorisation par le terme de plus haut degré) et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n c_k x^k - x^n}{x^n}$.

Par ailleurs, les c_i sont non tous nuls. On note $k_0 = \min\{i \mid c_i \neq 0\}$ (il existe bien) on a alors :

$$-H(x) = c_{k_0} x^{k_0} + \sum_{i=k_0+1}^{n-1} c_i x^i - x^n$$

Ainsi, par composition, addition et multiplication des limites :

$$h(x) = \frac{\overbrace{c_{k_0} + \sum_{i=k_0+1}^{n-1} c_i x^{i-k_0}}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0} - \overbrace{x^{n-k_0}}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty}}{\underbrace{x^{n-k_0}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Donc h établit une bijection (strictement décroissante) de $]0, +\infty[$ sur $] -1, +\infty[$.
 $0 \in] -1, +\infty[$ admet un unique antécédent par h .

les équations $h(x) = 0$ et donc $H(x) = 0$ (par équivalence) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.4. Montrer que $H'(\alpha) \neq 0$, donc que α est une racine simple de H .

On a donc $H(\alpha) = 0$. Si $H'(\alpha) = 0$ également, alors $h'(\alpha) = \frac{nH(\alpha) - \alpha H'(\alpha)}{\alpha^{n+1}} = 0$.

Or on a vu que pour tout $x > 0$, $h'(x) < 0$. On a donc une contradiction ($h'(\alpha) = 0$ et $h'(\alpha) < 0$).

Ainsi $H'(\alpha) \neq 0$.

Si α est racine d'ordre $m > 1$, il existe g fonction polynomiale d'ordre $n - m$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = (x - \alpha)^m \times g(x)$$

En dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = m(x - \alpha)^{m-1}g(x) + (x - \alpha)^m g'(x)$.

Et donc, puisque $m \geq 1$, $H'(\alpha) = 0 + 0 = 0$. Absurde.

α est racine simple de H .

II.5. Soit ζ une racine complexe de H . On va démontrer par l'absurde que nécessairement $|\zeta| \leq \alpha$.

Supposons que $|\zeta| > \alpha$. En évaluant le signe de $H(|\zeta|)$, montrer que $|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$.

(Il faut considérer $|\zeta|$, comme un nombre réel, strictement positif).

Supposons que $|\zeta| > \alpha$, alors comme h est décroissante strictement : $h(|\zeta|) < h(\alpha) = 0$.

Et ainsi $H(|\zeta|) = -|\zeta|^n \times h(|\zeta|) > 0$ ce qui donne exactement

$$|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

II.6. Montrer que cela conduit à une contradiction, puis conclure.

On pourra exploiter l'inégalité triangulaire d'ordre $n - 1$: $\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ pour $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, quelconques.

Par ailleurs, nous savons que ζ est une racine (complexe) de H , donc $H(\zeta) = 0 = \zeta^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k$.

On a donc par inégalité triangulaire :

$$|\zeta|^n = |\zeta^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k \zeta^k| = \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

où pour finir, on a exploité $c_k \geq 0$, donc $|c_k z| = c_k |z|$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On trouve donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k < |\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$$

C'est contradictoire. L'hypothèse ($|\zeta| > \alpha$) faite précédemment est fausse. Bilan :

Pour tout ζ racine (complexe) de H , $|\zeta| \leq \alpha$

III . Deux applications

III.1. Première application. Soit $H_1 : x \mapsto x^5 - x^4 - 2x^2 - x - 6$.

Évaluer $H_1(2)$. Que dire des racines de H_1 ? Combien de racines entières H_1 admet-il ?

$$H_1(2) = 2^5 - 2^4 - 2 \times 2^2 - 2 - 6 = 32 - 16 - 8 - 2 - 6 = 0.$$

H_1 est exactement de la forme des polynômes H de la question précédente, avec $n = 5$, et $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_2 = 2$, $c_1 = 1$ et $c_0 = 6$.

En effet, tous les c_i sont positifs et ils ne sont pas tous nuls.

Donc H_1 n'admet qu'une racine strictement positive, ici $\alpha = 2$ d'après les calculs,

toutes les autres racines sont de module inférieur ou égal à 2.

Si H_1 admet d'autres racines entières, cela ne peut être que $-2, -1, 0$ (pas 1 car une seule racine réelle positive).
Or $H_1(-2) = -60 \neq 0$, $H_1(-1) = -8 \neq 0$ et enfin $H_1(0) = -6 \neq 0$.

H_1 n'admet qu'une racine entière : 2.

III.2. Deuxième application. On considère $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$, puis $(a_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ m réels strictement positifs et

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

une fonction polynomiale de degré $m-1$.

On pose $\gamma = \max_{1 \leq i \leq m-1} \frac{a_{i-1}}{a_i}$, le plus grand rapport des termes consécutifs : $\frac{a_{i-1}}{a_i}$.

(a) On note $F_\gamma : x \mapsto (x - \gamma)F(x)$.

Montrer que F_γ est une fonction polynomiale de degré m , puis que pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$[F_\gamma]_k = a_{k-1} - \gamma a_k$$

(avec les conventions : $a_m = 0$ et $a_{-1} = 0$.)

Par produit de deux polynômes, nous savons que F_γ est également un polynôme.

Son degré est égal à la somme de celui de F : $m-1$ additionné à celui de $x \mapsto x - \gamma$ i.e. 1.

Donc F_γ est un polynôme de degré m .

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_\gamma(x) = (x - \gamma) \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k+1}}_{h=k+1 \Rightarrow k=h-1} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \gamma a_k x^k}_{h=k} = \sum_{h=1}^m a_{h-1} x^h - \sum_{h=0}^{m-1} \gamma a_h x^h = a_{m-1} x^m + \sum_{h=1}^{m-1} (a_{h-1} - \gamma a_h) x^h - \gamma a_0$$

alors, $[F_\gamma]_m = a_{m-1} = a_{m-1} - \gamma a_m$ car $a_m = 0$, $[F]_0 = -\gamma a_0 = a_{-1} - \gamma a_0$ car $a_{-1} = 0$.

Ainsi avec la formule précédente :

Pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $[F_\gamma]_k = a_{k-1} - \gamma a_k$.

(b) En déduire que $H : x \mapsto \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(x)$ vérifie exactement les hypothèse de la partie II.

En déduire que pour toute racine ζ de F , $|\zeta| \leq \gamma$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \frac{1}{a_{m-1}} F(x) = x^m - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\gamma a_k - a_{k-1}}{a_{m-1}} x^k$$

Et comme $\gamma = \max_i \frac{a_i}{a_{i-1}}$, on a donc pour tout $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $\gamma \geq \frac{a_i}{a_{i-1}}$, donc $\gamma a_{i-1} - a_i \geq 0$ (puisque $a_{i-1} > 0$).

Et par conséquent, puisqu'également $a_{m-1} > 0$, $c_k := \frac{\gamma a_k - a_{k-1}}{a_{m-1}} > 0$.

$H : x \mapsto \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(x)$ vérifie exactement les hypothèse de la partie II.

On peut donc lui appliquer la conclusion : $\forall \zeta$, racines de H , donc pour toutes racines de F_γ , $|\zeta| \leq \gamma$.

Mais les racines de F sont toutes des racines de F_γ , donc

$\forall \zeta$ racines de F , $|\zeta| \leq \gamma$

IV La borne de Cauchy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, un polynôme de degré n , à coefficients dans $\mathbb{C}$ et tel que les $(a_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ soient non tous nuls.

IV.1. Montrer que l'équation d'inconnue $x : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$ notée (E), possède une unique solution réelle strictement positive.

Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de f et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

Puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \geq |a_n| x^n \text{ si et seulement si } x \leq \rho(f)$$

f est de degré n , donc $a_n \neq 0$.

Soit $H : x \mapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| x^k$. H vérifie les mêmes hypothèses que le polynôme H de la première partie.

Donc, également, H n'admet qu'une unique racine réelle, strictement positive (elle est simple), ainsi

l'équation d'inconnue $x : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$ notée (E), possède une unique solution réelle strictement positive.

Plus précisément encore, en première partie nous avons vu que

la fonction $h : x \mapsto \frac{-H(x)}{x^n}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc H est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
ainsi : $\forall x \in]0, \rho(f)], \frac{H(x)}{x^n} \leq \frac{H(\rho(f))}{\rho(f)^n} = 0$ et $\forall x \in]\rho(f), +\infty[, \frac{H(x)}{x^n} > \frac{H(\rho(f))}{\rho(f)^n} = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \geq |a_n| x^n$ si et seulement si $x \leq \rho(f)$.

IV.2. Montrer que, pour tout racine complexe ζ de f , on a

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

Soit ζ une racine de f . $\sum_{k=0}^n a_k \zeta^k = 0$, ainsi par inégalité triangulaire :

$$|a_n| \times |\zeta|^n = |a_n \zeta^n| = \left| - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| (|\zeta|)^k$$

Par conséquent, d'après la question précédente (l'équivalence avec l'inégalité)

$$|\zeta| \leq \rho(f)$$

IV.3. Soit $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de f avec comme convention :

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

On a donc la factorisation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i)$.

(a) On admet que pour tout nombres complexes $z_1, \dots, z_n$, $\prod_{i=1}^n (x - z_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} z_i \right) x^{n-k}$.

Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$$

f se factorise : $f(x) = a_n (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \dots (x - \zeta_n)$.

Avec la formule donnée dans l'énoncé, ce calcul se développe en

$$f(x) = a_n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} \zeta_i \right) x^{n-k} \right)$$

Le coefficient du polynôme f devant le monôme x^{n-k} est donc

$$a_{n-k} = [f]_{n-k} = a_n (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} \zeta_i \right)$$

Par inégalité triangulaire (I.T.) :

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| = \left| (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} \zeta_i \right) \right| \leq \left| \sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} \zeta_i \right| \leq \sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \left| \prod_{i \in I} \zeta_i \right| \stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} |\zeta_i| = \sum_{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} |\zeta_i| \leq \sum_{\substack{I \in \binom{\llbracket n \rrbracket}{k} \\ |\zeta_i| \leq |\zeta_n|}} \prod_{i \in I} |\zeta_n|$$

Or pour tout $I \in \binom{\mathbb{N}_n}{k}$, $\prod_{i \in I} |\zeta_n| = |\zeta_n|^{\text{card}(I)} = |\zeta_n|^k$, indépendant de I . Donc

$$\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \leq \sum_{I \in \binom{\mathbb{N}_n}{k}} |\zeta_n|^k = \text{card} \left(\binom{\mathbb{N}_n}{k} \right) |\zeta_n|^k = \binom{n}{k} |\zeta_n|^k$$

Ainsi, en faisant le changement de variable $h = n - k$ et par symétrie du coefficient binomial :

$$\left| \frac{a_h}{a_n} \right| \leq \binom{n}{n-h} |\zeta_n|^{n-h} = \binom{n}{h} |\zeta_n|^{n-h}$$

(b) En déduire que

$$\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$$

On sait que $\rho(f)$ est la racine de H , on a donc $\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \rho(f)^k$. Ainsi, d'après les inégalités de la question précédente, comme tous les termes multipliés $(\rho(f)^k)$ sont positifs :

$$\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k} \rho(f)^k$$

(c) En déduire que

$$(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n|$$

On a donc (toujours par positivité stricte des produits) :

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \right)^{n-k} = \left(1 + \frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \right)^n - \binom{n}{n} \left(\frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \right)^{n-n} = \left(1 + \frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \right)^n - 1$$

En exploitant la formule du binôme de Newton.

Ainsi : $\left(1 + \frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \right)^n \geq 2$. Puis par croissance de $t \mapsto t^{1/n} = \sqrt[n]{t}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{|\zeta_n|}{\rho(f)} \geq \sqrt[n]{2} - 1$$

Ainsi $(\rho(f) > 0)$ et en exploitant l'inégalité démontrée en IV.1. :

$$(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$