# Devoir Surveillé n°1

Sujet donné le samedi 27 septembre 2025, 3h.
**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

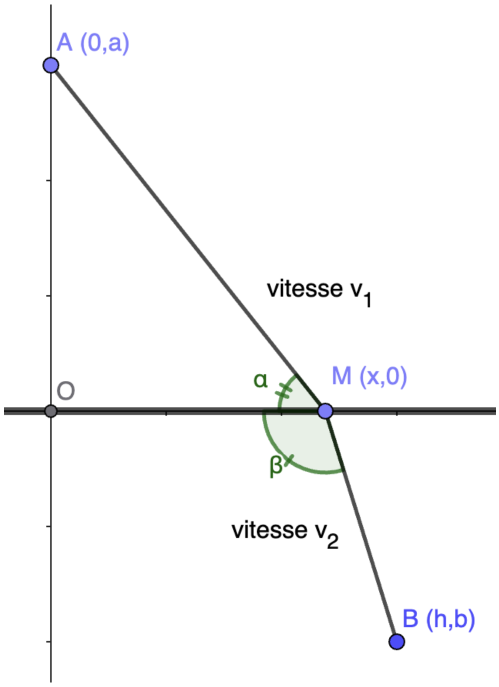
## Exercice - Principe de Fermat

Dans le but de conforter ou réfuter les lois énoncées par Descartes, Fermat énonce la règle suivante :

*« La nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'acourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération. »*

Dans le cadre de cet exercice, ce principe de Fermat se comprend ainsi :
*La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement extrémale.*

On cherche donc le trajet de la lumière (modélisé ici par des particules de photon) pour aller d'un point $A$ à un point $B$ a travers deux milieux. Nous considérerons (en exploitant le principe de Fermat) que le trajet suit une ligne droite dans un milieu homogène lorsque la vitesse de déplacement est constante.
On considère un repère cartésien délimitant le milieu. Le point $A$ a pour coordonnée $(0, a)$, le point $M$ a pour coordonnée $(x, 0)$ et le point $B$ a pour coordonnée $(h, b)$. La particule se déplace avec une vitesse $v_1$ dans le milieu $y > 0$, et $v_2$ dans le milieu $y \leqslant 0$.




.1. Exprimer le temps $T_1(x)$ mis par la particule pour aller du point $A$ au point $M$.

.2. Exprimer le temps $T_2(x)$ mis par la particule pour aller du point $M$ au point $B$.

.3. On note $x_0$, la valeur de $x$ pour obtenir le temps $T$ minimal mis par la particule pour aller de $A$ à $B$.
Exprimer $x_0$ comme solution d'une équation quadratique (avec des carrés et des racines carrées).

.4. On note $\alpha_0$ l'angle entre $O$, $M(x_0)$ et $A$ et $\beta_0$ l'angle entre $O$, $M(x_0)$ et $B$ (cf. figure).
Montrer que la trajectoire effectivement suivant par les particules lumineuses vérifient : $\dfrac{1}{v_1}\cos\alpha_0 + \dfrac{1}{v_2}\cos\beta_0 = 0$.

.5. Sous quelle forme plus connue est écrite la loi de Descartes

Le principe de Fermat conduira au principe de moindre action, énoncé par Maupertuis et sas cesse enrichi en science physique dans une champ de plus en plus large : optique, mécanique, thermodynamique et quantique...

# Problème - Excursion en Trigonométrie

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des nombres réels $\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ avec $m$ et $n$ des entiers naturels non nuls.

Rappelons qu'un réel $r$ est un rationnel lorsqu'il existe deux entiers relatifs $p$ et $q$ ($q \neq 0$) avec $p$ et $q$ premiers entre eux tels que $r = \frac{p}{q}$.

On pourra utiliser sans les démonter les résultats suivants d'arithmétique :

- Soient $a, b$ et $c$ trois entiers relatifs, si $a$ et $b$ sont premiers entre eux et si $a$ divise $bc$ alors $a$ divise $c$ (lemme de Gauss).
- Soit $p$ un nombre premier, si $p$ divise $a^2$, alors $p$ divise $a$.

## I . Irrationalité de $\sqrt{17}$

I.1. Démontrer que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel.

On admet qu'on peut démontrer de manière analogue que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

## II Somme(s) de cosinus

Dans cette partie, on veut établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Soit $m$ un entier naturel non nul ($m \in \mathbb{N}^*$).

II.1. (a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer le produit $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ en fonction d'une somme de cosinus et de sinus exploitant uniquement les formules d'addition.

(b) Soient $a$ et $b$ deux réels avec $b \not\equiv 0[2\pi]$. Déduire de la question précédente, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$ une expression de $\cos(a+kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ comme somme de sinus et de cosinus.

(c) En déduire, en multipliant par $\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ puis en simplifiant, une expression de $\sum_{k=0}^{m-1}\cos(a+kb)$ sous la forme $\frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos(\ldots ? \ldots)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$ où le « ? » sera remplacé par une expression explicite dépendant de $m, a$ et $b$.

Dans le reste de cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout entier relatif $k$, on pose

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) .$$

II.2. Comparer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k$, $a_{k+2n+1}$ et $a_{2n+1-k}$.

II.3. Montrer que $\forall\ (s,k) \in \mathbb{Z}^2, \quad 2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$ . Que devient cette relation lorsque $k = s$ ?

II.4. Établir la relation qui suit : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

II.5. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} a_k$ et en déduire : $\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}$.

II.6. Déduire des relations précédentes une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

II.7. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

## III Applications

On exploite les résultats et les notations des parties précédentes. On s'intéresse successivement aux cas $n = 3$ et $n = 8$.

III.1. Dans cette première application, $n = 3$.

(a) Calculer $s_1$, $s_2$ et $s_3$, où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 \qquad s_3 = a_1a_2a_3$$

(b) Développer, pour tout réel $x$, l'expression $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ sous la forme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, où l'on exprimera $A$, $B$ et $C$ en fonction des nombres $s_1$, $s_2$ et $s_3$.

L'objectif de cette question est de montrer que l'équation $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$ $(\star)$ n'admet pas de solution rationnelle.

On suppose que $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, donc $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux) est un rationnel solution de $(\star)$.

(c) Montrer que $8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$.
En déduire que $q$ divise 8 ; puis $p$ divise 1

(d) En déduire que $\frac{p}{q}$ appartient à un ensemble de 8 éléments que l'on précisera.

(e) Conclure et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ n'est pas rationnel.

III.2. On va montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ peut s'écrire à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.
Dans cette seconde application, $n = 8$ et l'on conserve les notations ($a_k$...avec $n = 8$)de la partie I.

(a) On pose $x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ et $x_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_3$.
Calculer $x_1 + x_2$ et établir que $x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)$.

(b) Monter que $x_1 > 0$ et en déduire une expression de $x_1$ et de $x_2$ à l'aide de radicaux carrés.
*On pourra montrer que $x_1$ et $x_2$ sont les racines d'une équation polynomiale de degré 2, dont on cherchera dans un second temps une expression des racines.*

(c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ n'est pas rationnel.

(d) On pose

$$y_1 = a_3 + a_5 \qquad y_2 = a_6 + a_7 \qquad y_3 = a_1 + a_4 \qquad y_4 = a_2 + a_8$$

Calculer $y_1y_2$ et $y_3y_4$. En déduire une expression de $y_1, y_2, y_3$ et $y_4$ à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

(e) Monter que

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1-\sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17-\sqrt{17}}}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}} + 4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}$$

*On commencera par montrer que $y_1 = 2a_1a_4$...*

Il est possible de construire sur le cercle unité à la règle et au compas le point d'angle polaire $\frac{\pi}{17}$. On ne demande pas une telle construction.

# IV Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence, la suite $(T_n)$ des fonctions suivantes :

$$T_0 : x \mapsto 1 \quad , \quad T_1 : x \mapsto x \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} : x \mapsto 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

IV.1. Donner l'expression de $T_2$ et de $T_3$. Puis montrer que $T_4 : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n$ est une fonction polynomiale de degré $n$ et de terme dominant $2^{n-1}x^n$.

IV.2. Montrer, par récurrence bien soignée, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

IV.3. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$ ,

$$T_n'(\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \not\equiv 0[n]$, $x_k := \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est une racine de $T_n'$.

(c) Montrer que $x_1 > x_2 > \ldots x_{n-2} > x_{n-1}$.

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n'(x) = n2^n \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

IV.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $H : x \mapsto T_{2n} - 2\,(T_n)^2 + 1$ admet une infinité de racines (dans $[-1,1]$).
Que peut-on en déduire concernant $T_{2n}$ ?

IV.5. En exploitant la même stratégie, montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$T_m \circ T_n = T_{m\times n}$$

IV.6. Déduire de ces questions que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ est racine de la fonction polynomiale :

$$16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

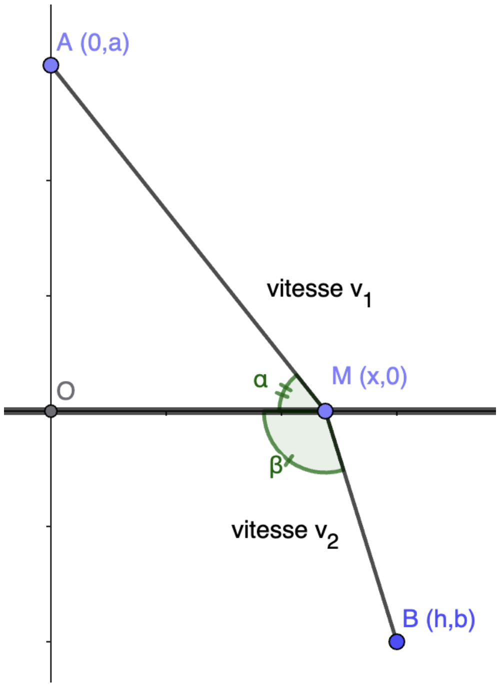
où $X$ est la fonction polynomiale identité : $X : x \mapsto x$

# DEVOIR SURVEILLE 1

# CORRECTION

## Exercice - Principe de Fermat

On cherche donc le trajet de la lumière (modélisé ici par des particules de photon) pour aller d'un point $A$ à un point $B$ a travers deux milieux. Nous considérerons (en exploitant le principe de Fermat) que le trajet suit une ligne droite dans un milieu homogène lorsque la vitesse de déplacement est constante.
On considère un repère cartésien délimitant le milieu. Le point $A$ a pour coordonnée $(0, a)$, le point $M$ a pour coordonnée $(x, 0)$ et le point $B$ a pour coordonnée $(h, b)$. La particule se déplace avec une vitesse $v_1$ dans le milieu $y > 0$, et $v_2$ dans le milieu $y \leqslant 0$.




.1. Exprimer le temps $T_1(x)$ mis par la particule pour aller du point $A$ au point $M$.

---

La distance entre $A(0, a)$ et $M(x, 0)$ est $d_1(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$. A vitesse $v_1$, cela donne le temps

$$\boxed{T_1(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}}$$

---

.2. Exprimer le temps $T_2(x)$ mis par la particule pour aller du point $M$ au point $B$.

---

La distance entre $B(h, b)$ et $M(x, 0)$ est $d_2(x) = \sqrt{(x-h)^2 + b^2}$. A vitesse $v_2$, cela donne le temps

$$\boxed{T_1(x) = \frac{\sqrt{(x-h)^2 + b^2}}{v_2}}$$

---

.3. On note $x_0$, la valeur de $x$ pour obtenir le temps $T$ minimal mis par la particule pour aller de $A$ à $B$.
Exprimer $x_0$ comme solution d'une équation quadratique (avec des carrés et des racines carrées).

---

La fonction de temps à optimiser est donc $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(x-h)^2 + b^2}}{v_2}$.
Elle est dérivable sur $[0, h]$, de dérivée :

$$T'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{2(x-h)}{2v_2\sqrt{(x-h)^2 + b^2}} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-h}{v_2\sqrt{(x-h)^2 + b^2}}$$

La dérivée s'annule en $x_0$ pour lequel :

$$\boxed{\frac{x_0}{v_1\sqrt{x_0^2 + a^2}} + \frac{x_0 - h}{v_2\sqrt{(x_0-h)^2 + b^2}} = 0}$$

---

.4. On note $\alpha_0$ l'angle entre $O$, $M(x_0)$ et $A$ et $\beta_0$ l'angle entre $O$, $M(x_0)$ et $B$ (cf. figure).
Montrer que la trajectoire effectivement suivant par les particules lumineuses vérifient : $\frac{1}{v_1}\cos\alpha_0 + \frac{1}{v_2}\cos\beta_0 = 0$.

---

Dans le triangle $OAM$ rectangle en $O$, l'angle $\alpha_0$ vérifie $\cos\alpha_0 = \frac{OM}{AM} = \frac{x_0}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
On note $O'$, le point de coordonnées $(h,0)$, l'angle $O'MB$ est exactement égal à $\pi-\beta_0$.
Dans le triangle $O'BM$ rectangle en $O'$, l'angle $\pi-\beta_0$ vérifie $\cos(\pi-\beta_0) = \frac{O'M}{BM} = \frac{h-x_0}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}}$.
Ainsi $\frac{x_0-h}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}} = -\frac{h-x_0}{\sqrt{(x-h)^2+a^2}} = -\cos(\pi-\beta_0) = \cos\beta_0$.
Par conséquent, avec la question précédente, on retrouve la condition :

$$\boxed{\frac{\cos\alpha_0}{v_1} + \frac{\cos\beta_0}{v_2} = 0}$$

---

.5. Sous quelle forme plus connue est écrite la loi de Descartes

---

L'indice du milieu noté $n_i$ est inversement proportionnel à la vitesse de déplacement de la lumière dans ce milieu :
Ainsi, il existe $K$, tel que $n_1 = \frac{K}{v_1}$ et $n_2 = \frac{K}{v_2}$.
Puis, on note $i_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, l'angle réalisé en $M$ avec la normale au plan côté milieu 1
et $i_2 = \beta - \frac{\pi}{2}$, l'angle réalisé en $M$ avec la normale au plan coté milieu 2.
On a donc

$$n_1\sin i_1 = \frac{K}{v_1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{K}{v_1}\cos\alpha = -\frac{K}{v_2}\cos\beta = -\frac{K}{v_2}\cos\left(i_2+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{K}{v_2}\times(-\sin i_2) = n_2\sin i_2$$

$$\boxed{n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2}$$

---

Le principe de FERMAT conduira au principe de moindre action, énoncé par MAUPERTUIS et sas cesse enrichi en science physique dans une champ de plus en plus large : optique, mécanique, thermodynamique et quantique...

# Problème - Excursion en Trigonométrie

## I Irrationalité de $\sqrt{17}$

I.1. Démontrer que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel.

---

Supposons par l'absurde que $\sqrt{17}$ est un nombre rationnel.

Alors, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{17} = \dfrac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.

Alors, $17q^2 = p^2$ donc 17 divise $p^2$, or 17 est un nombre premier, donc $17|p$.

Donc, il existe $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 17\tilde{p}$.

En injectant dans l'égalité $17q^2 = p^2$, on obtient $17q^2 = (17\tilde{p})^2$, donc $q^2 = 17\tilde{p}^2$.

Donc, 17 divise $q^2$, or 17 est premier, donc 17 divise $q$.

Ainsi, 17 divise $p$ et $q$, donc 17 divise $p \wedge q$, or $p \wedge q = 1$ donc 17 divise 1 ce qui est faux (les diviseurs de 1 sont 1 et $-1$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sqrt{17} \text{ est un nombre irrationnel.}}$$

---

On admet qu'on peut démontrer de manière analogue que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

## II Somme(s) de cosinus

Dans cette partie, on veut établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Soit $m$ un entier naturel non nul ($m \in \mathbb{N}^*$).

II.1. (a) Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer le produit $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ en fonction d'une somme de cosinus et de sinus exploitant uniquement les formules d'addition.

---

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. D'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta).
\end{aligned}$$

En soustrayant les égalités précédentes, on obtient

$$\boxed{\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2}.}$$

---

(b) Soient $a$ et $b$ deux réels avec $b \not\equiv 0[2\pi]$. Déduire de la question précédente, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$ une expression de $\cos(a+kb)\sin\left(\dfrac{b}{2}\right)$ comme somme de sinus et de cosinus.

---

En utilisant la question précédente pour $\alpha \leftarrow a+kb$ et $\beta \leftarrow \dfrac{b}{2}$,

$$\begin{aligned}
\cos(a+kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+kb+\frac{b}{2}\right) - \sin\left(a+kb-\frac{b}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)b\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \cos(a+kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)b\right)\right].}$$

---

(c) En déduire, en multipliant par $\sin\left(\dfrac{b}{2}\right)$ puis en simplifiant, une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\cos(a+kb)$ sous la forme $\dfrac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos\left(\ldots?\ldots\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$ où le « ? » sera remplacé par une expression explicite dépendant de $m, a$ et $b$.

---

En utilisant la question précédente, puis une somme télescopique,

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\cos(a+kb) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\sin\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)b\right)-\sin\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)b\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\sin\left(a+\frac{1}{2}b+kb\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}b+(k-1)b\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\sin\left(a+\frac{1}{2}b+kb\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=-1}^{m-2}\sin\left(a+\frac{1}{2}b+jb\right) \quad \text{en posant } j=k-1\\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\frac{1}{2}b+(m-1)b\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}b+(-1)b\right)\right] \quad \text{après télescopage}\\
&= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\right)-\sin\left(a-\frac{1}{2}b\right)\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi, comme $\sin p-\sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\cos(a+kb) &= \sin\left(\frac{a+\left(m-\frac{1}{2}\right)b-\left(a-\frac{1}{2}b\right)}{2}\right)\cos\left(\frac{a+\left(m-\frac{1}{2}\right)b+a-\frac{1}{2}b}{2}\right)\\
&= \sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos\left(a+\frac{m-1}{2}b\right).
\end{aligned}
$$

Finalement, l'hypothèse $b \not\equiv 0\ [2\pi]$ garantit $\sin\dfrac{b}{2} \neq 0$ (car $\sin\dfrac{b}{2}\neq 0 \iff \dfrac{b}{2}\equiv 0\ [\pi] \iff b\equiv 0\ [2\pi]$) donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m-1}\cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos\left(a+\frac{m-1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.}$$

---

Dans le reste de cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout entier relatif $k$, on pose

$$a_k = (-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

II.2. Comparer, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $a_k$, $a_{k+2n+1}$ et $a_{2n+1-k}$.

---

D'après la définition,

$$
\begin{aligned}
a_{k+2n+1} &= (-1)^{k+2n+1}\cos\left(\frac{(k+2n+1)\pi}{2n+1}\right)\\
&= -(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}+\pi\right) \quad \text{or, pour tout } t\in\mathbb{R},\ \cos(t+\pi)=-\cos(t)\\
&= (-1)^2(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_k,\\
a_{2n+1-k} &= (-1)^{2n+1-k}\cos\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) \quad \text{observons que } k \text{ et } -k \text{ ont même parité donc } (-1)^{-k}=(-1)^k\\
&= -(-1)^k\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{or, pour tout } t\in\mathbb{R},\ \cos(\pi-t)=-\cos(t)\\
&= (-1)^2(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\
&= a_k.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a_{k+2n+1}=a_{2n+1-k}=a_k.}$$

---

II.3. Montrer que $\forall\ (s,k)\in\mathbb{Z}^2,\quad 2a_sa_k = a_{s+k}+a_{s-k}$ . Que devient cette relation lorsque $k=s$ ?

---

Soit $s,\ k\in\mathbb{Z}^2$. En utilisant les formules de linéarisation,

$$
\begin{aligned}
2a_sa_k &= 2(-1)^{k+s}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{s\pi}{2n+1}\right)\\
&= 2(-1)^{k+s}\times\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}+\frac{s\pi}{2n+1}\right)+\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}-\frac{s\pi}{2n+1}\right)\right]\\
&= (-1)^{k+s}\cos\left(\frac{(k+s)\pi}{2n+1}\right)+(-1)^{k+s}\cos\left(\frac{(k-s)\pi}{2n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Or, $(-1)^{-s} = \left(\dfrac{1}{-1)}\right)^s = (-1)^{-s}$ et la fonction cosinus est paire, donc

$$2a_s a_k = a_{k+s} + a_{s-k}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } 2a_s a_k = a_{k+s} + a_{s-k}..}$$

Lorsque $k = s$, la relation s'écrit

$$2a_k^2 = a_{2k} + a_0 = (-1)^{2k} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1 = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, lorsque } k = s, \text{ on retrouve la formule de duplication : } a_{2k} = 2a_k^2 - 1.}$$

---

II.4. Établir la relation qui suit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

---

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} a_{2n+1-k} \quad \text{d'après la question II.2}\\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} a_j \quad \text{en posant le changement d'indice } j = 2n+1-k\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.}$$

---

II.5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k$ et en déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{2}$.

---

Observons que

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos\left(k\frac{\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(k\frac{\pi}{2n+1} + k\pi\right) = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left[0 + k\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right]$$

Appliquons la formule établie dans la question II.1(c) pour $m \leftarrow 2n+1$, $a \leftarrow 0$, $b \leftarrow \dfrac{\pi}{2n+1} + \pi$ ce qui est autorisé car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\dfrac{\pi}{2n+1} + \pi \in \left]\pi, \pi + \dfrac{\pi}{3}\right]$ donc $\dfrac{\pi}{2n+1} + \pi \not\equiv 0\ [2\pi]$,

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left[0 + k\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right] = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\left(\frac{\pi}{2n+1}+\pi\right)}{2}\right)\cos\left(0 + \frac{2n+1-1}{2}\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right)}{\sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2n+1}+\pi\right)}{2}\right)}$$

or $\sin\left(\dfrac{(2n+1)\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{(2n+2)\pi}{2}\right) = \sin((n+1)\pi) = 0$,

$$\boxed{\text{donc, } \sum_{k=0}^{2n} a_k = 0.}$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k}_{} = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \text{ d'après la question II.4}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}.}$$

---

II.6. Déduire des relations précédentes une expression de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

---

En choisissant $n = 2$ dans la relation de la question II.5, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} a_k = -\frac{1}{2}$ ce qui donne

$$-\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

or la formule de duplication donne $\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$ si bien que

$$2\cos^2\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi, $\cos\frac{\pi}{5}$ est une racine du trinôme $2X^2 - X - \frac{1}{2}$. Le discriminant de ce trinôme vaut $1^2 + 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5$ donc il admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Or d'une part $\frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\frac{\pi}{5} > 0$ et d'autre part $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$,

$$\boxed{\text{donc } \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

---

II.7. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

---

Raisonnons par l'absurde. Si $\cos\frac{\pi}{5}$ est rationnel, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{p}{q}$.

Alors, $\sqrt{5} = 4\frac{p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irrationnalité de $\sqrt{5}$ admise dans la partie **??**.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \cos\frac{\pi}{5} \text{ est irrationnel.}}$$

---

# III Applications

On exploite les résultats et les notations des parties précédentes. On s'intéresse successivement aux cas $n = 3$ et $n = 8$.

III.1. Dans cette première application, $n = 3$.

(a) Calculer $s_1$, $s_2$ et $s_3$, où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 \qquad s_3 = a_1a_2a_3$$

---

On applique directement la formule trouvée en II.5. : $s_1 = \sum_{k=1}^{3} a_k = -\frac{1}{2}$.

Puis, en exploitant les relations obtenues en II.3. et en II.2. :

$$s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = \frac{1}{2}\left((a_3 + a_1) + (\underbrace{a_4}_{=a_{7-4}=a_3} + a_2) + (\underbrace{a_5}_{a_{7-5}=a_2} + a_1)\right) = \frac{1}{2}(2a_1 + 2a_2 + 2a_3) = -\frac{1}{2}$$

$$s_3 = (a_1a_2)a_3 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)a_3 = \frac{1}{4}(\underbrace{a_6 + 1}_{\text{cas } k=s} + a_4 + a_2) = \frac{1}{4}(a_1 + a_3 + a_2 + 1) = \frac{1}{8}$$

(Autre option : $a_2 = a_5$ et donc $s_3 = \frac{1}{4}(1 + a_4 + a_5 + a_6) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$)

$$\boxed{\text{Bilan : } \quad s_1 = s_2 = -\frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{8}}$$

---

(b) Développer, pour tout réel $x$, l'expression $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ sous la forme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, où l'on exprimera $A$, $B$ et $C$ en fonction des nombres $s_1$, $s_2$ et $s_3$.

---

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = (x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x - a_1a_2a_3)$$

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3}$$

---

L'objectif de cette question est de montrer que l'équation $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$ $(\star)$ n'admet pas de solution rationnelle.

On suppose que $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, donc $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux) est un rationnel solution de $(\star)$.

(c) Montrer que $8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$.
En déduire que $q$ divise 8 ; puis $p$ divise 1

---

Supposons que $\frac{p}{q}$ soit une racine de $(\star)$, donc $\frac{p^3}{q^3} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\frac{p}{q} - \frac{1}{8} = 0$.
On multiplie cette relation par $8q^3 \neq 0$ :

$$\boxed{8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0 \text{ ainsi } 8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3}$$

Ainsi $q(-4p^2 + 4pq + q^2) = 8p^3$. Donc $q$ divise $8p^3$. Or $q \wedge p = 1$, donc $q \wedge p^3 = 1$ et donc d'après le lemme de Gauss : $q|8$.
De même : $q^3 = 8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$. Donc $p$ divise $q^3$. Mais $p \wedge q^3 = 1$, donc $p$ divise 1.

$$\boxed{q \text{ divise 8 et } p \text{ divise 1.}}$$

---

(d) En déduire que $\frac{p}{q}$ appartient à un ensemble de 8 éléments que l'on précisera.

---

L'ensemble des diviseurs de 1 est $\{1, -1\}$, l'ensemble des diviseurs de 8 est $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \frac{p}{q} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}.}$$

---

(e) Conclure et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ n'est pas rationnel.

---

On fait les 8 calculs possibles pour savoir si effectivement $\frac{p}{q}$ est bien solution de $(\star)$ : $A\left(\frac{p}{q}\right) := \left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{p}{q} - \frac{1}{8}$

— $A(-1) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0$.
— $A\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \neq 0$.
— $A\left(\frac{-1}{4}\right) = -\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \neq 0$.
— $A\left(\frac{-1}{8}\right) = -\frac{1}{512} + \frac{1}{128} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{-1+4+16-32}{512} = -\frac{-13}{512} \neq 0$.
— $A\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{512} + \frac{1}{128} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{+1+4-16-32}{512} = -\frac{-43}{512} \neq 0$.
— $A\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} + \frac{1}{32} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{-13}{64} <\neq 0$.
— $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0$.
— $A(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \neq 0$.

Ainsi l'équation $(\star)$ n'admet aucune solution rationnelle. Par ailleurs, on a vu (III.1.(b)) que les solutions de cette équations sont $a_1 = \cos\frac{\pi}{7}$, $a_2$ et $a_3$.

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \text{ n'est pas rationnel.}}$$

---

III.2. On va montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ peut s'écrire à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.
Dans cette seconde application, $n = 8$ et l'on conserve les notations ($a_k$...avec $n = 8$)de la partie I.

(a) On pose $x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ et $x_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_3$.
Calculer $x_1 + x_2$ et établir que $x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)$.

---

En réorganisant les calculs (addition commutative) et en exploitant la partie II (avec $n = 8$) :

$$\boxed{x_1 + x_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{k=1}^{8} a_k = -\frac{1}{2}}$$

Alors que en développant

$$\begin{aligned}
x_1x_2 = &\ (a_1 + a_2 + a_4 + a_8)(a_5 + a_6 + a_7 + a_3) \\
= &\ a_1a_5 + a_1a_6 + a_1a_7 + a_1a_3 + a_2a_5 + a_2a_6 + a_2a_7 + a_2a_3 \\
&+ a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_7 + a_3a_4 + a_5a_8 + a_6a_8 + a_7a_8 + a_3a_8 \\
= &\ \frac{1}{2}(a_6 + a_4 + a_7 + a_5 + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_7 + a_3 + a_8 + a_4 + a_9 + a_5 + a_5 + a_1 \\
&+ a_9 + a_1 + a_{10} + a_2 + a_{11} + a_3 + a_7 + a_1 + a_{13} + a_3 + a_{14} + a_2 + a_{15} + a_1 + a_{11} + a_5) \\
= &\ \frac{1}{2}\big(4a_1 + (3a_2 + a_{15}) + (3a_3 + a_{14}) + (3a_4 + a_{13}) + 4a_5 + (2a_6 + 2a_{11}) + (3a_7 + a_{10}) + (2a_8 + 2a_9)\big) \\
= &\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

où l'on rappelle qu'ici : $a_k = a_{17-k}$, puisque $n = 8$.

$$\boxed{x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)}$$

---

(b) Monter que $x_1 > 0$ et en déduire une expression de $x_1$ et de $x_2$ à l'aide de radicaux carrés.
*On pourra montrer que $x_1$ et $x_2$ sont les racines d'une équation polynomiale de degré 2, dont on cherchera dans un second temps une expression des racines.*

---

$\frac{4\pi}{17} < \frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$, puisque $16 < 17$ et par décroissance de cos sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi $\cos\frac{2\pi}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $x_1 > -\cos\frac{\pi}{17} + \sqrt{2} + \cos\frac{8\pi}{17} > 0$, car $\cos\frac{\pi}{17} \leqslant 1 < \sqrt{2}$.

$$\boxed{\text{Donc } x_1 > 0.}$$

$x_1$ et $x_2$ sont les racines de

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

d'après les résultats numériques de $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ obtenues à la partie précédente. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$. Les racines sont

$$\boxed{\underbrace{x_1}_{>0} = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{17} - 1}{4}}$$

---

(c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ n'est pas rationnel.

---

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ est un nombre rationnel.
Il existe donc $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \wedge q = 1$ et $q > 0$ tel que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{p}{q}$.
On a alors

$$\cos\frac{2\pi}{17} = 2\cos^2\frac{\pi}{17} - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q} \in \mathbb{Q}$$

Et de même $\cos\frac{4\pi}{17} = 2\frac{(2p^2 - q^2)^2}{q^2} - 1 \in \mathbb{Q}$ et $\cos\frac{8\pi}{17} \in \mathbb{Q}$.
Ainsi

$$x_1 = -\cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} \in \mathbb{Q}$$

On peut donc supposer que $x_1 = \frac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{N}^*$ et $P \wedge Q = 1$.
On a alors, avec la question précédente :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \iff \sqrt{17} = \frac{4P}{Q} + 1 = \frac{4P + Q}{Q} \in \mathbb{Q}$$

Or on a vu en début de devoir que $\sqrt{17}$ n'est pas un nombre rationnel. Nous avons donc une contradiction.

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \text{ n'est pas rationnel.}}$$

---

(d) On pose

$$y_1 = a_3 + a_5 \qquad y_2 = a_6 + a_7 \qquad y_3 = a_1 + a_4 \qquad y_4 = a_2 + a_8$$

Calculer $y_1y_2$ et $y_3y_4$. En déduire une expression de $y_1, y_2, y_3$ et $y_4$ à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

---

Toujours avec la même formule :

$$\begin{aligned} y_1y_2 = \quad & (a_3 + a_5)(a_6 + a_7) = a_3a_6 + a_3a_7 + a_5a_6 + a_5a_7 = \frac{1}{2}(a_9 + a_3 + a_{10} + a_4 + a_{11} + a_1 + a_{12} + a_2) \\ & \frac{1}{2}(a_8 + a_3 + a_7 + a_4 + a_6 + a_1 + a_5 + a_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} y_3y_4 = \quad & (a_1 + a_4)(a_2 + a_8) = a_1a_2 + a_1a_8 + a_4a_2 + a_4a_8 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_9 + a_7 + a_6 + a_2 + a_{12} + a_4) \\ & \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_8 + a_7 + a_6 + a_2 + a_5 + a_4) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{y_1y_2 = y_3y_4 = -\frac{1}{4}}$$

$y_1+y_2 = a_3+a_5+a_6+a_7 = x_2$ et $y_3+y_4 = a_1+a_2+a_4+a_8$.

Ainsi, $y_1$ et $y_2$ sont les racines des $x^2-(x_2)x-\frac{1}{4} = x^2+\frac{\sqrt{17}+1}{4}x-\frac{1}{4}$ avec $\Delta_1 = \frac{17+1+2\sqrt{17}}{16}+1 = \frac{34+2\sqrt{17}}{16}$.

Et, $y_3$ et $y_4$ sont les racines des $x^2-(x_1)x-\frac{1}{4} = x^2+\frac{-\sqrt{17}+1}{4}x-\frac{1}{4}$ avec $\Delta_2 = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{16}+1 = \frac{34-2\sqrt{17}}{16}$.

En terme de signes :

$y_1 = a_3+a_5 = -\cos\frac{3\pi}{17}-\cos\frac{5\pi}{17} < 0$, $y_2 = a_6+a_7 = \cos\frac{6\pi}{17}-\cos\frac{7\pi}{17} > 0$ (décroissance de cos sur $[0,\pi]$).

$y_3 = a_1+a_4 = -\cos\frac{\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17} < 0$ (décroissance de cos sur $[0,\pi]$), $y_4 = a_2+a_8 = \cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17} > 0$.

On a toutes les informations, on peut identifier les calculs :

$$y_1 = \frac{-\frac{\sqrt{17}+1}{4}-\frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}}{2} = \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

Avec des calculs comparables :

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_3 = \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_4 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_3 = \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \qquad y_4 = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}}$$

---

(e) Monter que

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1-\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\frac{1-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}}+4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}$$

*On commencera par montrer que $y_1 = 2a_1a_4\ldots$*

---

$2a_4a_1 = a_5+a_3 = y_1$. Donc $a_1$ et $a_4$ sont les racines du polynômes $x^2-y_3x+\frac{y_1}{2}$, de discriminant $\Delta_3 = y_3^2-2y_1$.

$a_1 = -\cos\frac{\pi}{17}$ est la racine négative de ce polynôme, donc

$$\cos\frac{\pi}{17} = -\frac{y_3-\sqrt{\Delta_3}}{2} = \frac{\sqrt{\Delta_3}-y_3}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 = \ & \frac{1}{8^2}\left[(-1+\sqrt{17})^2+34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}(-1+\sqrt{17})\right]-2\frac{1}{8}\left[-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]\\ = \ & \frac{1}{8^2}\left[68+12\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}(2-2\sqrt{17})+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]\\ = \ & \frac{1}{4^2}\left[17+3\sqrt{17}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}}(1-\sqrt{17})+4\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\frac{y_3}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_3}}{2} = \frac{1-\sqrt{17}}{16}+\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{17}}(1-\sqrt{17})+4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}}$$

---

Il est possible de construire sur le cercle unité à la règle et au compas le point d'angle polaire $\frac{\pi}{17}$. On ne demande pas une telle construction.

# IV Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence, la suite $(T_n)$ des fonctions suivantes :

$$T_0 : x \mapsto 1 \quad , \quad T_1 : x \mapsto x \quad , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} : x \mapsto 2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

IV.1. Donner l'expression de $T_2$ et de $T_3$. Puis montrer que $T_4 : x \mapsto 8x^4-8x^2+1$.

---

On applique la formule (pour $n=1$ et $n=2$), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{T_2(x) = 2xT_1(x)-T_0(x) = 2x^2-1 \qquad , \qquad T_3(x) = 2xT_2(x)-T_1(x) = (4x^3-2x)-(x) = 4x^3-3x}$$

Puis à nouveau pour $T_4$ :

$$\boxed{T_4(x) = 2x(4x^3-3x)-(2x^2-1) = 8x^4-8x^2+1}$$

---

On <u>admet</u> que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n$ est une fonction polynomiale de degré $n$ et de terme dominant $2^{n-1}x^n$.

IV.2. Montrer, par récurrence bien soignée, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

---

*On peux fixer $\theta$ avant la récurrence (comme dans la correction ici), ou bien définir la famille de propositions avec un pour tout $\theta$ dans l'énoncé.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_n$ : « $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ ».

— $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1 \times \theta)$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta \underbrace{\cos(\big(n+1)\theta\big)}_{\mathcal{P}_{n+1}} - \underbrace{\cos\big(n\theta\big)}_{\mathcal{P}_n}$$

Or

$$\cos\big((n+2)\theta\big) + \cos\big(n\theta\big) = \cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big) = 2\cos\big((n+1)\theta\big)\cos\theta$$

On a donc bien, par soustraction :

$$T_{n+2}(\cos\theta) = \cos\big((n+1)\theta\big)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

Avec une récurrence à double hérédité (ou deux termes), on a démontré :

$$\boxed{\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)}$$

---

IV.3. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0[\pi]$ ,

$$T_n'(\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

---

Soit $g : \theta \mapsto T_n(\cos\theta)$. $f$ est dérivable par composition de deux fonctions dérivables : une fonction polynomiale et l'application cos.

On trouve alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g'(\theta) = \sin(\theta) \times T_n'(\cos\theta)$.

Mais aussi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = \cos(n\theta)$, qui se dérivé en $g' : \theta \mapsto n\sin(n\theta)$.

On peut donc identifier et diviser par $\sin\theta$ car $\theta \not\equiv 0[\pi]$ donc $\sin\theta \neq 0$ :

$$\boxed{\forall\ \theta \not\equiv 0[\pi], \qquad T_n'(\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}}$$

---

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \not\equiv 0[n]$, $x_k := \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est une racine de $T_n'$.

---

Soit $k \in \mathbb{Z}$, avec $k \not\equiv 0[n]$, donc $\frac{k}{n}\pi \not\equiv 0 \times \frac{\pi}{n} \quad \left[\frac{n\pi}{n}\right]$ i.e. $\frac{k\pi}{n} \not\equiv 0[\pi]$.

Ainsi,

$$T_n'(x_k) = T_n'\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{n\sin\left(n\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$$

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}, \qquad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ est une racine de } T_n'}$$

---

(c) Montrer que $x_1 > x_2 > \dots x_{n-2} > x_{n-1}$.

---

$T_n$ est une fonction polynomiale de degré $n$, donc $T_n'$ est de degré $n-1$. Elle admet donc au plus $n-1$ racines distinctes.

Nécessairement, les $(x_k)$ ne sont pas tous différents....

Or la fonction cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (à valeurs dans $[-1,1]$),
ainsi si $\alpha, \beta \in [0,\pi]$ et $\alpha \neq \beta$, alors nécessairement $\cos\alpha \neq \cos\beta$.

Ici, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $0 = \frac{0\pi}{n} < \frac{k\pi}{n} < \frac{n\pi}{n} = \pi$.
Par décroissance de cos sur $[0,\pi]$, on a ainsi :

$$\boxed{(1 >)x_1 > x_2 > \dots x_{n-2} > x_{n-1}(> -1)}$$

---

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_n'(x) = n2^n \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

---

On a trouvé $n-1$ racines distinctes de $T_n'$, de degré $n-1$, on donc factoriser totalement $T_n'$ :

$$\exists\ Q \text{ polynomiale de degré } 0 \text{ tel que } \forall\ x \in \mathbb{R}, T_n(x) = Q(x) \times \prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k)$$

Comme $\deg Q = 0$, $Q$ est constant, on le note $\lambda$. Le développement de $T_n'$ a pour coefficient dominant $\lambda x^{n-1}$.
Or $T_n$ a pour coefficient dominant $2^{n-1}x^n$, donc le coefficient de sa dérivée est $n2^{n-1}x^{n-1}$.
Finalement, on identifie et on trouve :

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad T_n'(x) = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x - x_k) = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

---

IV.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $H : x \mapsto T_{2n} - 2\,(T_n)^2 + 1$ admet une infinité de racines (dans $[-1,1]$).
Que peut-on en déduire concernant $T_{2n}$ ?

---

Pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$.
Ainsi
$$H(x) = T_{2n}(x) - 2[T_n(x)]^2 - 1 = T_{2n}(\cos\theta) - 2[T_n(\cos\theta)]^2 - 1 = \cos(2n\theta) - 2\cos^2(n\theta) + 1 = 0$$
Puisque $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.
Donc $H$ est une fonction polynomiale qui admet une infinité de racines. C'est donc la fonction polynomiale identiquement nul.
On en conclue :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, T_{2n} = 2[T_n]^2 - 1}$$

---

IV.5. En exploitant la même stratégie, montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$T_m \circ T_n = T_{m\times n}$$

puis que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$

$$T_n' \times T_m' \circ T_n = T_{m\times n}'$$

---

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $K : x \mapsto T_m \circ T_n(x) - T_{m\times n}(x)$, une fonction polynomiale.
Soit $x \in [-1,1]$ et $\theta = \arccos x$ i.e. $x = \cos\theta$.

$$K(x) = T_m(T_n(\cos\theta) - T_{m\times n}(\cos\theta) = T_m(\cos n\theta) - \cos\big((m\times n)\theta\big) = \cos\big(m(n\theta)\big) - \cos\big(m\times n)\theta)\big) = 0$$

La fonction polynomiale $K$ admet une infinité de racines, elle est donc identiquement nulle.

$$\boxed{\forall\ m, n \in \mathbb{N}, \qquad T_m \circ T_n = T_{m\times n}}$$

---

IV.6. Déduire de ces questions que $\cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$ est racine de la fonction polynomiale :

$$16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

où $X$ est la fonction polynomiale identité : $X : x \mapsto x$

---

D'après la question 3.(b), $\cos\dfrac{\pi}{17}$ est racine de $T_{17}'$.
Or d'après l'énoncé et les formules précédentes :

$$\begin{aligned} T_{17} = &\ \ 2XT_{16} - T_{15} = 2X\left(2[T_8]^2 - 1\right) - T_3 \times T_5 = 2X\left(2\left(2T_4^2 - 1\right)^2 - 1\right) - T_3(2XT_4 - T_3) \\ = &\ \ 2X(2(4T_4^4 - 4T_4^2 + 1) - 1) - 2XT_3T_4 + T_3^2 = 16XT_4^4 - 16XT_4^2 + 2X - 2XT_3T_4 + T_3^3 \end{aligned}$$

On dérive (la dérivée de $X$ est l'application $x \mapsto 1$) :

$$T_{17}' = 16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \text{ est racine de } 16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2}$$

où $X$ est la fonction polynomiale identité : $X : x \mapsto x$

---