

Solution

EXCURSION DE 4H DANS LE DEMI-PLAN DE POINCARÉ

- 1. a)** Soit $z \in \mathbb{P}$. Le nombre complexe $\frac{az+b}{cz+d}$ est bien défini si et seulement si $cz+d \neq 0$.

En notant $z = x + iy$ sous forme algébrique,

$$cz + d = (cx + d) + cyi.$$

- * Si $c \neq 0$, comme $y > 0$, alors $cz + d$ est de partie imaginaire non nulle, donc est non nul.
- * Si $c = 0$, comme $ad - bc \neq 0$, alors $d \neq 0$ donc la partie réelle de $cz + d$ vaut d et est non nulle. Ainsi, $cz + d \neq 0$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{P}$, $\frac{az+b}{cz+d}$ est bien défini.

- b)** Soit $z \in \mathbb{P}$. D'après la définition,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}$$

$$\text{donc } \mathcal{I}m\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \mathcal{I}m(z).$$

Or $ad - bc > 0$ et $\mathcal{I}m(z) > 0$ (car $z \in \mathbb{P}$), donc

$$\forall z \in \mathbb{P}, h(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{P}.$$

Partie I : Ensembles images

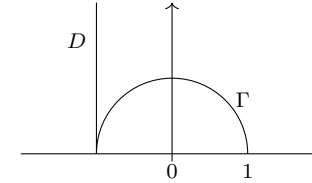
- 2.** Soit $z \in \Gamma$ fixé quelconque.

Il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Ainsi, $\mathcal{I}m(z) = \sin(\theta)$.

Or $\theta \in]0, \pi[$, donc $\mathcal{I}m(z) > 0$ et $z \in \mathbb{P}$.

Ainsi, $\Gamma \subset \mathbb{P}$.

- 3.** D'après la paramétrisation du cercle unité, Γ est le demi-cercle, centré en O , de rayon 1, et inclus dans le demi-plan supérieur. D est la demi-droite d'équation $x = -1$ incluse dans le demi-plan supérieur.



- 4. a)** La fonction f est le quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ donc f est dérivable et pour tout $\theta \in]0, \pi[$ et

$$f'(\theta) = \frac{\cos(\theta)(1 - \cos(\theta)) - \sin(\theta) \times \sin(\theta)}{(1 - \cos(\theta))^2} = \frac{\cos(\theta) - 1}{(1 - \cos(\theta))^2} = -\frac{1}{1 - \cos(\theta)}.$$

Ainsi, $f' < 0$ donc f est décroissante sur $]0, \pi[$.

Enfin, pour $\theta \in]0, \pi[$, transformons l'expression de $f(\theta)$ afin de calculer la limite en 0 :

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ainsi, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\theta) = +\infty$.

Une autre option est d'exploiter la règle de L'Hospital.

On note $n : \theta \mapsto \sin \theta$, $n(0) = 0$

et n dérivable avec $n'(\theta) = \cos(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$.

On note $d : \theta \mapsto 1 - \cos \theta$, $d(0) = 0$

et d dérivable avec $d'(\theta) = \sin(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$.

On a alors $\frac{n'(\theta)}{d'(\theta)} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} +\infty$.

La règle de L'hospital permet d'affirmer que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n(\theta)}{d(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n'(\theta)}{d'(\theta)} = +\infty$$

Remarque. Cette dernière expression permettait d'établir le tableau de variations sans dériver !

θ	0	π
$f'(\theta)$	$\parallel$	—
f	$\parallel$	$+\infty \searrow 0$

b) D'après les définitions,

$$\begin{aligned}
h(e^{i\theta}) &= \frac{2e^{i\theta} + 3}{-e^{i\theta} + 1} = \frac{(3 + 2\cos\theta) + 2i\sin\theta}{(1 - \cos\theta) - i\sin\theta} \\
&= \frac{((3 + 2\cos\theta) + 2i\sin\theta)((1 - \cos\theta) + i\sin\theta)}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\
&= \frac{(3 + 2\cos\theta - 3\cos\theta - 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) + i\sin\theta((2(1 - \cos\theta) + (3 + 2\cos\theta)))}{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= \frac{(3 - \cos\theta - 2) + 5i\sin\theta}{2 - 2\cos\theta} \quad \text{car } \cos^2 + \sin^2 = 1 \\
&= \frac{(1 - \cos\theta) + 5i\sin\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}f(\theta)i.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$h(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} + i\frac{5}{2}f(\theta).$$

c) On raisonne par double inclusion.

($\subset$) Soit $\gamma \in h(\Gamma)$ fixé quelconque. Il existe $z \in \Gamma$ tel que $\gamma = h(z)$. Par définition de Γ , il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. D'après la question précédente, $\Re(h(e^{i\theta})) = \frac{1}{2}$ et $\Im(h(e^{i\theta})) = \frac{5}{2}f(\theta) > 0$ (car $f > 0$ sur son domaine de définition) donc $\gamma = h(e^{i\theta}) \in \Delta_+$.

Ainsi, $h(\Gamma) \subset \Delta_+$.

($\supset$) Soit $z \in \Delta_+$ quelconque, fixé.

Il existe $x > 0$ tel que $z = \frac{1}{2} + ix$.

★ La fonction f est continue sur $]0, \pi[$,

★ $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = +\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi} f(\theta) = 0$,

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que $f(\theta_0) = \frac{2}{5}x$.

Alors, d'après la question **4.b)**, $h(e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2} + i\frac{5}{2}f(\theta_0) = \frac{1}{2} + i\frac{5}{2} \times \frac{2}{5}x = \frac{1}{2} + ix = z$ donc $z \in h(\Gamma)$.

Ainsi, $\Delta_+ \subset h(\Gamma)$.

Finalement,

$$h(\Gamma) = \Delta_+.$$

5.a) D'après la définition,

$$h(-1 + ix) = \frac{2(-1 + ix) + 3}{-(-1 + ix) + 1} = \frac{1 + 2ix}{2 - ix} = \frac{(1 + 2ix)(2 + ix)}{4 + x^2}$$

$$h(-1 + ix) = -\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4}i.$$

Ainsi,

$$h(-1 + ix) = -\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 4} + \frac{5x}{x^2 + 4}i.$$

b) En utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}
\left(X + \frac{3}{4}\right) + Y^2 &= \left(-\frac{2x^2 - 2}{x^2 + 4} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5x}{x^2 + 4}\right)^2 \\
&= \frac{(4(-2x^2 + 2) + 3(x^2 + 4))^2 + 16 \times 25x^2}{(4(x^2 + 4))^2} \\
&= \frac{(-5x^2 + 20)^2 + 16 \times 25x^2}{(4(x^2 + 4))^2} \\
&= \frac{25(-x^2 + 4)^2 + 25 \times 16x^2}{(4(x^2 + 4))^2} \\
&= \frac{25}{16} \times \frac{(x^2 + 4)^2}{(x^2 + 4)^2} \\
&= \frac{25}{16}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(X + \frac{3}{4}\right)^2 + Y^2 = \frac{25}{16}.$$

c) Notons C le cercle de centre $(-\frac{3}{4}, 0)$ et de rayon $\frac{5}{4}$.

Montrons que $h(D) \subset C \cap \mathbb{P}$.

Soit $z = -1 + ix \in D$ fixé quelconque. Alors, d'après la question précédente, les coordonnées cartésiennes (X, Y) de $h(z)$ satisfont l'équation du cercle de centre $(-\frac{3}{4}, 0)$ et de rayon $\frac{5}{4}$ donc $h(z)$ est sur ce cercle. De plus $x > 0$ donc $Y = \frac{5x}{x^2+4} > 0$ si bien que $h(z) \in \mathbb{P}$ (ce qui pouvait aussi se déduire de la question 1 puisque $h \in \mathcal{H}$, le déterminant de la matrice définissant h étant strictement positif).

Par conséquent, $h(D) \subset C \cap \mathbb{P}$.

Remarque On peut montrer l'égalité des ensembles.

Réciproquement, soit $M \in C \cap \mathbb{P}$.

Notons $(X_M, Y_M) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées cartésiennes de M .

Puisque M est sur le demi-cercle C de centre $(-\frac{3}{4}, 0)$ et de rayon $\frac{5}{4}$ et inclus dans le demi-plan de Poincaré,

$$-2 = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} < X_M < -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Y_M > 0$$

On a la caractérisation suivante :

$$M \in h(D) \iff \exists x \in \mathbb{R}_+^* : \begin{cases} \frac{2-2x^2}{x^2+4} = X_M \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases}.$$

Il faudrait donc trouver une solution $x > 0$ du système ci-dessus.

Or,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2-2x^2}{x^2+4} = X_M \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases} &\iff \begin{cases} 2-2x^2 = (x^2+4)X_M \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2(X_M+2) = 2(1-2X_M) \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases} \\ &\quad \text{or } X_M \in]-2, \frac{1}{2}[\text{ donc } 1-2X_M > 0 \text{ et } X_M+2 > 0 \\ &\iff \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}} \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}} & (1) \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M & (2) \end{cases} \\ &\quad \text{car } Y_M > 0 \text{ donc } x = (x^2+4)Y_M > 0 \end{aligned}$$

Or, pour $x = \sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}}$, en notant $X = \frac{2(1-x^2)}{x^2+4}$ et $Y = \frac{5x}{x^2+4}$, le calcul de la question précédente a permis d'établir que

$$\left(X + \frac{3}{4}\right)^2 + Y^2 = \frac{25}{16}$$

et, en remontant le calcul qui a donné $x = \sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}}$, on trouve que $X_M = \frac{2-2x^2}{x^2+4} = X$ donc

$$\left(X_M + \frac{3}{4}\right)^2 + Y^2 = \frac{25}{16}$$

Or $(X_M + \frac{3}{4})^2 + Y_M^2 = \frac{25}{16}$ car $M \in C$ donc

$$Y^2 = Y_M^2 \quad \text{donc} \quad Y = Y_M \quad \text{car ces deux réels sont positifs}$$

Par conséquent l'équation (2) du système étudié est satisfaite donc le système $\begin{cases} \frac{2-2x^2}{x^2+4} = X_M \\ \frac{5x}{x^2+4} = Y_M \end{cases}$ admet $x = \sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}}$ comme unique solution strictement positive.

L'unicité ne nous est pas utile, mais l'existence d'une solution permet d'affirmer que $h\left(\sqrt{\frac{2(1-2X_M)}{X_M+2}}\right) = X_M + iY_M$ ce qui prouve que $M \in h(D)$.

Par conséquent, $C \cap \mathbb{P} \subset h(D)$.

Partie II : Structure de $\mathcal{H}$

6. $\det(I) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 > 0$, donc $I \in E$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{P}$, $h_I(z) = \frac{z+0}{0 \times z+1} = z$.

Ainsi, $I \in E$ et $h = \text{id}_{\mathbb{P}}$.

7. Attention Il ne s'agit pas d'un polynôme à coefficients réels de la variable réelle.

On ne peut donc pas appliquer le théorème qui affirme que l'identification des coefficients est possible.

Dans le TD, nous avons réussi une fois à généraliser ce théorème pour un polynôme à coefficients complexes de la variable réelle.

Mais ici ce n'est pas possible car $\mathcal{I}m(z) > 0$, puisque $z \in \mathbb{P}$ donc on ne peut pas donner de valeurs réelles à z .

Dans ces cas là, il n'y a plus qu'une stratégie *reprenre la démonstration qui conduit au résultat sur l'identification, et essayer de l'adapter*. Il s'agit alors de prendre plus de points $z_1, z_2, \dots$ que de coefficients du polynôme.

★ **Analyse.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{P}, h_M(z) = z \iff \frac{az+b}{cz+d} = z.$$

Particularisons cette relation pour certaines valeurs de z dans $\mathbb{P}$.

★ Pour $z = i$, on a $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, donc $ai+b = -c+di$. Ainsi,

$$\begin{cases} a &= d \\ b &= -c \end{cases}.$$

★ Pour $z = 2i$, on a $\frac{2ai+b}{2ci+d} = 2i$, donc $2ai+b = -4c+2di$. Ainsi,

$$\begin{cases} a &= d \\ b &= -4c \end{cases}.$$

On obtient ainsi $b = c = 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$.

De plus $M \in E$ donc $0 < \det M = a^2$ si bien que $a \neq 0$.

L'ensemble cherché est donc inclus dans $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

★ **Synthèse.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé quelconque.

D'une part $\det(\lambda I) = \lambda^2 > 0$ donc $\lambda I \in E$, et d'autre part

$$\forall z \in \mathbb{P}, h_{\lambda I}(z) = \frac{\lambda z + 0}{0 \times z + \lambda} = z$$

donc λI est un élément de E dont l'homographie associée est $\text{id}_{\mathbb{P}}$.

$$\boxed{\forall z \in E, h_M(z) = z \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*; M = \lambda I \Leftrightarrow M \in \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

8. a) ★ Soit $M \in E$, alors $h_M = h_M$.

Donc pour toute matrice $M \in E$, $M\mathcal{R}M$.

Ainsi $\mathcal{R}$ est réflexive.

★ Soient $M, N \in E$ tels que $M\mathcal{R}N$. Donc $h_M = h_N$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{P}$, $h_M(z) = h_N(z)$, donc $h_N(z) = h_M(z)$ (par symétrie de $=$ sur $\mathbb{C}$).

Et donc $N\mathcal{R}M$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique.

★ Soient $M, N, T \in E$ tels que $M\mathcal{R}N$ et $N\mathcal{R}T$. Donc $h_M = h_N$ et $h_N = h_T$.

Alors pour tout $z \in \mathbb{P}$, $h_M(z) = h_N(z) = h_T(z)$, donc $h_M(z) = h_T(z)$ (par transitivité de $=$ sur $\mathbb{C}$).

Et donc $M\mathcal{R}T$. Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

On aurait pu également remarquer que $\mathcal{R}$ est la relation associée à la fonction $\Phi : M \mapsto h_M$, non injective (cf questions suivantes).

b) Soit $M \in E$. On note $\mathcal{C}(M)$, la classe d'équivalence de M .

Analyse

Si $M' \in \mathcal{C}(M)$ (ou $M'\mathcal{R}M$), alors pour tout $z \in \mathbb{P}$, $h_M(z) = h_{M'}(z)$.

Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

On a donc pour tout $z \in \mathbb{P}$, $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$.

Et donc pour tout $z \in \mathbb{P}$,

$$(ac' - a'c)z^2 + (ad' + bc' - a'd - b'c)z + (bd' - b'd) = 0$$

Comme à la question précédente, en prenant $z \leftarrow i$, et la partie imaginaire, on trouve que nécessairement $ad' + bc' - a'd - b'c = 0$. Puis, en soustrayant les parties réelles pour $z \leftarrow i$ et $z \leftarrow 2i$, on trouve que nécessairement : $ac' - a'c = 0$ et $bd' - b'd = 0$.

Essayons de simplifier ces trois relations :

$$\begin{cases} ad' + bc' - a'd - b'c &= 0 \\ ac' - a'c &= 0 \\ bd' - b'd &= 0 \end{cases}$$

★ Supposons que $a = 0$. Alors comme $ad - bc > 0$, on a $bc < 0$ et donc nécessairement, $c \neq 0$ et $b \neq 0$.

La seconde équation donne $a'c = 0$, donc $a' = 0$, puisque $c \neq 0$. On trouve alors $bc' - b'c = 0$ et $bd' - b'd = 0$.

Et comme b est non nul : $c' = \frac{b'}{b}c$, $d' = \frac{b'}{b}d$ et $b' = \frac{b'}{b}b$.

En notant $\lambda = \frac{b'}{b}$, on a $d' = \lambda d$, $c' = \lambda c$, $b' = \lambda b$ et $a' = \lambda a = 0$.

★ Supposons que $a \neq 0$, et notons $\lambda = \frac{a'}{a}$.

on a donc $(L_2) \ c' = \frac{a'}{a}c = \lambda c$, mais aussi : $a' = \frac{a'}{a}a = \lambda a$.

Donc (avec L_1) $ad' + \lambda bc - \lambda ad - b'c = 0$

On applique le même raisonnement avec $b = 0$ ou $b \neq 0$.

• Si $b = 0$ (et toujours $a \neq 0$).

Alors $(L_3) : b'd = 0$, mais comme $ad - bc = ad > 0$, nécessairement $d \neq 0$

donc $b' = b = 0 = \lambda b$ et donc $ad' - \lambda ad = 0$ et $d' = \lambda d$, car $a \neq 0$.

• Si $b \neq 0$ (et toujours $a \neq 0$).

En notant $\mu = \frac{b'}{b}$, on trouve avec L_3 ; $b' = \mu b$ et $d' = \mu d$.

Et donc avec $L_1 : (\lambda - \mu)(ad - bc) = 0$. Donc nécessairement $\mu = \lambda$.

Dans tous les cas $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a', b', c', d') = (a, b, c, d)$ i.e $M' = \lambda M$.

Nécessairement $\lambda \neq 0$, sinon $\det(A) = 0$.

Synthèse,

Si $M' = \lambda M$, avec $\lambda \neq 0$ alors

$$h_{M'} : z \mapsto \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d} = h_M(z)$$

Donc $M' \mathcal{R} M$.

$$\mathcal{C}(M) = \{\lambda M, \lambda \in \mathbb{R}^*\}$$

9. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in E$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in E$.

Pour tout $z \in \mathbb{P}$,

$$\begin{aligned} h_{M_1} \circ h_{M_2}(z) &= h_{M_1}(h_{M_2}(z)) = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\ &= \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}. \end{aligned}$$

Notons par ailleurs que

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Alors que

$$\begin{aligned} \det(M_1 M_2) &= (a_1 a_2 + b_1 c_2)(c_1 b_2 + d_1 d_2) - (a_1 b_2 + b_1 d_2)(c_1 a_2 + d_1 c_2) \\ &= a_1 c_1 (a_2 b_2 - a_2 b_2) + a_1 d_1 (a_2 d_2 - b_2 c_2) \\ &\quad + b_1 c_1 (c_2 b_2 - a_2 d_2) + b_1 d_1 (c_2 d_2 - c_2 d_2) \\ &= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \\ &= \det(M_1) \det(M_2) \\ &> 0 \quad \text{car } (M_1, M_2) \in E^2 \text{ donc } \det(M_1) > 0 \text{ et } \det(M_2) > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $M_1 \times M_2 \in E$.

Et, l'identité établie ci-dessus pour tout $z \in \mathbb{P}$ montre que $h_{M_1} \circ$

$h_{M_2} = h_{M_1 \times M_2}$.

Ainsi,

$$h_{M_1} \circ h_{M_2} = h_{M_1 \times M_2} \text{ est une homographie.}$$

10.a) En utilisant le calcul précédent, pour tout $z \in \mathbb{P}$,

$$h_M \circ h_{M'}(z) = \frac{(ad - bc)z + (-ab + ba)}{(cd - dc)z + (-cb + da)} = z.$$

On montre de même que, pour tout $z \in \mathbb{P}$, $h_{M'} \circ h_M(z) = z$.

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{P}, h_M \circ h_{M'}(z) = h_{M'} \circ h_M(z) = z.$$

Ainsi, $h_M \circ h_{M'}(z) = h_{M'} \circ h_M = \text{id}_{\mathbb{P}}$ donc

$$h_M \text{ est bijective et sa bijection réciproque est } h_{M'}.$$

b) Posons $\delta = ad - bc$. $M \in E$ donc $\delta = ad - bc = \det(M) > 0$ ce

qui permet de poser $N = \frac{1}{\sqrt{\delta}} M = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{\delta}} & \frac{b}{\sqrt{\delta}} \\ \frac{c}{\sqrt{\delta}} & \frac{d}{\sqrt{\delta}} \end{pmatrix}$.

On remarque que

$$\det(N) = \det \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{\delta}} & \frac{b}{\sqrt{\delta}} \\ \frac{c}{\sqrt{\delta}} & \frac{d}{\sqrt{\delta}} \end{pmatrix} = \frac{ad - bc}{\sqrt{\delta}^2} = \frac{ad - bc}{\delta} = 1.$$

Par conséquent, $\det N > 0$ donc $N \in E$ et $\det(N) = 1$ donc la question **10.a)** permet d'affirmer que h_N est bijective de bijec-

tion réciproque h'_N où $N' = \begin{pmatrix} \frac{d}{\sqrt{\delta}} & -\frac{b}{\sqrt{\delta}} \\ -\frac{c}{\sqrt{\delta}} & \frac{a}{\sqrt{\delta}} \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $M \in E$, $N \in E$ et $N = \frac{1}{\sqrt{\delta}}M$ donc, d'après la question 8., $h_M = h_N$ si bien que h_M est bijective et $(h_M)^{-1} = h'_N$:

$$\forall z \in \mathbb{P}, h_M^{-1}(z) = h_{N'}(z) = \frac{\frac{d}{\sqrt{\delta}}z - \frac{b}{\sqrt{\delta}}}{-\frac{c}{\sqrt{\delta}}z + \frac{a}{\sqrt{\delta}}} = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Ainsi, h_M est bijective et $h_M^{-1} : z \in \mathbb{P} \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$.

11. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ fixée quelconque.

$$\begin{aligned} h_M(i) = i &\iff \frac{ai+b}{ci+d} = i \\ &\iff ai+b = i(ci+d) = -c+id \\ &\iff a=d \text{ et } b=-c \text{ par identification} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus M doit être dans E ce qui impose $0 < \det(M) = a^2 + b^2$, or $a^2 + b^2 \leq 0 \iff a = b = 0$ donc le seul couple de réels (a, b) à exclure est le couple $(0, 0)$.

Ainsi, $\mathcal{H}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \\ z \mapsto \frac{az+b}{-bz+a} \end{array} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}$.

12. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} h_M \text{ admet un point fixe} &\iff \exists z \in \mathbb{P} : h_M(z) = z \\ &\iff \exists z \in \mathbb{P} : \frac{az+b}{cz+d} = z \\ &\iff \exists z \in \mathbb{P} : az+b = cz^2 + dz \\ &\iff \exists z \in \mathbb{P} : cz^2 + (d-a)z - b = 0. \\ &\iff \text{l'équation } cx^2 + (d-a)x - b = 0 \\ &\quad \text{admet (au moins) une solution dans } \mathbb{P} \end{aligned}$$

★ Si $c = 0$, l'équation devient $(d-a)x - b = 0$,

★★ Si $d-a = 0$, l'équation devient $-b = 0$, qui admet au moins une solution dans $\mathbb{P}$ si et seulement si $b = 0$.

★★ Si $d-a \neq 0$, l'équation admet une unique solution qui est réelle donc aucune solution dans $\mathbb{P}$.

★ Si $c \neq 0$, $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ est une équation algébrique du second degré de discriminant $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$.

Si $\Delta \geq 0$, la ou les solutions de l'équation sont réelles donc aucune n'appartient à $\mathbb{P}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes non réelles conjuguées si bien que l'une d'elle est dans $\mathbb{P}$.

Par conséquent,

$$h_M \text{ possède un point fixe} \iff \begin{cases} c = 0 \text{ et } a = d \text{ et } b = 0 \\ \text{ou} \\ c \neq 0 \text{ et } (d-a)^2 + 4bc < 0 \end{cases}$$

Le premier cas équivaut à dire que $M = aI$ ce qui est exclu par hypothèse.

Ainsi, h_M possède un point fixe si et seulement si $c \neq 0$ et $(d-a)^2 + 4bc < 0$.

Remarque : si $c = 0$, on a $(d-a)^2 + 4bc = (d-a)^2 \geq 0$ donc

h_M possède un point fixe si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc < 0$.

13. a) D'après la question 8. (mais aussi 7.), pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in E$ $\Phi(\lambda M) = \Phi(M)$.

Donc en particulier $\Phi(2I_2) = \Phi(I_2)$.

Ainsi, Φ n'est pas injective

b) Soit $h \in \mathcal{H}$ fixée quelconque.

Par définition de $\mathcal{H}$, il existe $M \in E$ tel que $h = h_M$ donc $h = \Phi(M)$.

Ainsi, Φ est bien surjective.

c) Φ n'était pas injective

Ainsi, Φ n'est pas bijective.

Partie III : Distance hyperbolique

14. Soient $u, v \in \mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}
 |u - \bar{v}|^2 - |u - v|^2 &= (u - \bar{v})(\bar{u} - v) - (u - v)(\bar{u} - \bar{v}) \\
 &= |u|^2 - uv - \bar{v}\bar{u} + |v|^2 - |u|^2 + u\bar{v} + v\bar{u} - |v|^2 \\
 &= u(\bar{v} - v) - \bar{u}(\bar{v} - v) \\
 &= -(u - \bar{u})(v - \bar{v}) \\
 &= -2i\mathcal{I}m(u) \times 2i\mathcal{I}m(v) \\
 &= 4\mathcal{I}m(u)\mathcal{I}m(v) \\
 &> 0 \quad \text{car } (u, v) \in \mathbb{P}^2 \text{ donc } \mathcal{I}m(u) > 0 \text{ et } \mathcal{I}m(v) > 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|u - v| < |u - \bar{v}|.$$

D'après le point précédent, le rapport suivant est bien défini car $|u - \bar{v}| - |u - v| \neq 0$.

On a alors $|u - \bar{v}| - |u - v| > 0$ et donc l'équivalence :

$$\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \geq 1 \Leftrightarrow |u - \bar{v}| + |u - v| \geq |u - \bar{v}| - |u - v| \Leftrightarrow 2|u - v| \geq 0$$

Ces propositions équivalentes sont toutes vraies.

Ainsi,

$$\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \geq 1.$$

Autre argument. On pouvait aussi remarquer que $|u - v| \geq 0$ d'où

$$\underbrace{0}_{\text{question précédente}} \leq |u - \bar{v}| - |u - v| \leq |u - \bar{v}| \leq |u - \bar{v}| + |u - v|$$

Donc

$$\frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} \geq 1$$

15.a) Soient $u, v \in \mathbb{P}$. D'après la question précédente, $d(u, v)$ est bien définie.

a) D'après la question précédente et la croissance de la fonction logarithme,

$$d(u, v) \geq \ln(1) \geq 0.$$

Ainsi,

$$d(u, v) \geq 0.$$

b) D'après la définition de la distance logarithmique, $d(u, v) = 0$ si et seulement si $|u - \bar{v}| + |u - v| = |u - \bar{v}| - |u - v|$ si et seulement si $|u - v| = 0$. Ainsi,

$$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v.$$

c) D'après les propriétés du module, deux nombres opposés ont même module et deux nombres conjugués ont même module donc

$$|u - \bar{v}| = |\overline{u - v}| = |\bar{u} - v| = |v - \bar{u}| \quad \text{et} \quad |u - v| = |-(u - v)| = |v - u|$$

si bien que

$$d(u, v) = \ln \frac{|u - \bar{v}| + |u - v|}{|u - \bar{v}| - |u - v|} = \ln \frac{|v - \bar{u}| + |v - u|}{|v - \bar{u}| - |v - u|} = d(v, u).$$

$$d(u, v) = d(v, u).$$

16. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

a) D'après les définitions, pour $z, z' \in \mathbb{P}$,

$$h_M(z) - h(z') = \frac{(ad - bc)(z - z')}{(cz + d)(cz' + d)}.$$

b) Il s'agit de calculer

$$d(h_M(z), h_M(z')) = \ln \frac{|h_M(z) - \overline{h_M(z')}| + |h_M(z) - h_M(z')|}{|h_M(z) - \overline{h_M(z')}| - |h_M(z) - h_M(z')|}.$$

$$\text{Or } \overline{h_M(z')} = \overline{\frac{az' + b}{cz' + d}} = \frac{\overline{az' + b}}{\overline{cz' + d}} = \frac{a\bar{z}' + b}{c\bar{z}' + d} \text{ car } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Un calcul presque équivalent à celui de la question précédente, donne alors

$$h_M(z) - \overline{h_M(z')} = \frac{(ad - bc)(z - \overline{z'})}{(cz + d)(c\overline{z'} + d)}$$

De plus, en utilisant que $|cz' + d| = |\overline{cz' + d}| = |c\overline{z'} + d|$ car $(c, d) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{|h_M(z) - h_M(\overline{z'})| + |h_M(z) - h_M(z')|}{|h_M(z) - h_M(\overline{z'})| + |h_M(z) - h_M(z')|} &= \frac{\frac{|ad - bc||z - \overline{z'}|}{|cz + d||c\overline{z'} + d|} + \frac{|ad - bc||z - z'|}{|cz + d||cz' + d|}}{\frac{|ad - bc||z - \overline{z'}|}{|cz + d||c\overline{z'} + d|} - \frac{|ad - bc||z - z'|}{|cz + d||cz' + d|}} \\ &= \frac{\frac{|z - \overline{z'}| + |z - z'|}{|z - \overline{z'}| - |z - z'|}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{d(h(u), h(v)) = d(u, v).}$$

Partie IV : Géodésiques

17. a) Soit $z \in \mathbb{P}$. Alors, $\mathcal{I}m(z) \neq 0$ et $|z| = \sqrt{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2} > |\mathcal{R}e(z)|$. D'où

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{P}, |\mathcal{R}e(z)| < |z|.}$$

b) D'après la définition de $P_t(X) = X^2 - 2((1-t)\mathcal{R}e(z_0) + t\mathcal{R}e(z_1))X + (1-t)|z_0|^2 + t|z_1|^2$, comme $t \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} I &:= \Delta'_t + t(1-t)(\mathcal{R}e(z_0) - \mathcal{R}e(z_1))^2 \\ &= [(1-t)\mathcal{R}e(z_0) + t\mathcal{R}e(z_1)]^2 - [(1-t)|z_0|^2 + t|z_1|^2] \\ &\quad + t(1-t)(\mathcal{R}e(z_0) - \mathcal{R}e(z_1))^2 \\ &= (1-t)^2\mathcal{R}e(z_0)^2 + t^2\mathcal{R}e(z_1)^2 + 2t(1-t)\mathcal{R}e(z_0)\mathcal{R}e(z_1) - (1-t)|z_0|^2 \\ &\quad - t|z_1|^2 + t(1-t)(\mathcal{R}e(z_0)^2 + \mathcal{R}e(z_1)^2 - 2\mathcal{R}e(z_0)\mathcal{R}e(z_1)) \\ &= (1-t)[1-t+t]\mathcal{R}e(z_0)^2 + t[t+1-t]\mathcal{R}e(z_1)^2 \\ &\quad - (1-t)|z_0|^2 - t|z_1|^2 \\ &= -(1-t)\mathcal{I}m(z_0)^2 - t\mathcal{I}m(z_1)^2 < 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Delta'_t < -t(1-t)(\mathcal{R}e(z_0) - \mathcal{R}e(z_1))^2.}$$

c) ★ Supposons que $t \in]0, 1[$. Alors $t(1-t) > 0$ donc, d'après la question précédente, $\Delta'_t < 0$. Le discriminant de P_t est donc strictement négatif, donc P_t admet deux racines distinctes non réelles, complexes conjuguées (car P_t est à coefficients réels) qui sont

$$(1-t)\mathcal{R}e(z_0) + t\mathcal{R}e(z_1) + i\sqrt{|\Delta'_t|} \text{ et } (1-t)\mathcal{R}e(z_0) + t\mathcal{R}e(z_1) - i\sqrt{|\Delta'_t|}$$

Une seule de ses racines est de partie imaginaire positive, c'est z_t :

$$\boxed{z_t = (1-t)\mathcal{R}e(z_0) + t\mathcal{R}e(z_1) + i\sqrt{|\Delta'_t|}.}$$

★ Supposons que $t = 0$. Alors $P_0(X) = X^2 - 2\mathcal{R}e(z_0)X + |z_0|^2$, donc $\Delta'_0 = \mathcal{R}e(z_0)^2 - |z_0|^2 = -\mathcal{I}m(z_0)^2 < 0$ si bien que P_0 admet deux racines non réelles complexes conjuguées

$$\begin{cases} \mathcal{R}e(z_0) + i\sqrt{\mathcal{I}m(z_0)^2} \underset{\mathcal{I}m(z_0)>0}{=} \mathcal{R}e(z_0) + i\mathcal{I}m(z_0) = z_0 \\ \mathcal{R}e(z_0) - i\sqrt{\mathcal{I}m(z_0)^2} \underset{\mathcal{I}m(z_0)>0}{=} \mathcal{R}e(z_0) - i\mathcal{I}m(z_0) = \overline{z_0} \end{cases}$$

Remarque : on aurait pu obtenir cela directement en reconnaissant, dans l'expression de $P_0(X)$ le développement classique de $(X - z_0)(X - \overline{z_0})$.

Une seule de ces racines possède une partie imaginaire positive, c'est z_0 .

Observons que l'expression établie ci-dessus pour $t \in]0, 1[$ est encore vraie pour $t = 0$:

$$(1-0) \times \mathcal{R}e(z_0) + 0 \times \mathcal{R}e(z_1) + i\sqrt{|\Delta'_0|} = \mathcal{R}e(z_0) + i\sqrt{\mathcal{I}m(z_0)^2} = z_0.$$

★ Supposons que $t = 1$. Comme dans le cas $t = 0$, P_1 admet une unique racine de partie imaginaire positive, c'est z_1 et la formule générale est encore vraie : $(1-1) \times \mathcal{R}e(z_1) + 1 \times \mathcal{R}e(z_1) + i\sqrt{|\Delta'_1|} = z_1$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, P_t a une unique racine de partie imaginaire positive
 $z_t = (1-t)\Re(z_0) + t\Re(z_1) + i\sqrt{|\Delta'_t|}$.

- 18.** D'après la question précédente, dans le cas particulier $\Re(z_0) = \Re(z_1)$, en reprenant la quatrième ligne du calcul de Δ'_t valable pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\Delta'_t = (1-t)(\Re(z_0)^2 - |z_0|^2) + t(\Re(z_1)^2 - |z_1|^2)$$

$$\Delta'_t = -((1-t)(|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) + t(|z_1|^2 - \Re(z_1)^2))$$

si bien qu'en utilisant $\Re(z_0) = \Re(z_1)$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} z_t &= \Re(z_0) + i\sqrt{(1-t)(|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) + t(|z_1|^2 - \Re(z_1)^2)} \\ &= \Re(z_0) + i\sqrt{(|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) + t((|z_1|^2 - \Re(z_1)^2) - (|z_0|^2 - \Re(z_0)^2))} \\ &= \Re(z_0) + i\sqrt{\Im(z_0)^2 + t(\Im(z_1)^2 - \Im(z_0)^2)} \end{aligned}$$

Supposons que $\Im(z_0) \leq \Im(z_1)$.

$f : t \mapsto \Im(z_0)^2 + t(\Im(z_1)^2 - \Im(z_0)^2)$ est la fonction affine qui vaut en 0 :

$$f(0) = \Im(z_0)^2$$

et en 1,

$$f(1) = \Im(z_1)^2$$

Or cette fonction affine est continue et croissante (pente positive car $0 < \Im(z_0) \leq \Im(z_1)$) donc $f([0, 1]) = [\Im(z_0)^2, \Im(z_1)^2]$.

La fonction racine carrée est également continue et croissante donc l'image du segment $[0, 1]$ par la fonction $t \mapsto \sqrt{|\Delta'_t|} = \sqrt{f(t)}$ est le segment $[\sqrt{\Im(z_0)^2}, \sqrt{\Im(z_1)^2}] = [\Im(z_0), \Im(z_1)]$.

Finalement, le point mobile d'affixe z_t , lorsque t parcourt le segment $[0, 1]$, a une partie réelle constante égale à $\Re(z_0)$ et une partie imaginaire qui croît continûment de $\Im(z_0)$ à $\Im(z_1)$.

On procède de la même manière en adaptant le raisonnement si $\Im(z_0) > \Im(z_1)$.

Par conséquent, lorsque t parcourt $[0, 1]$, z_t décrit le segment vertical reliant les points d'affixes z_0 et z_1 .

- 19. a)** En utilisant l'expression de z_t obtenue précédemment, et le fait que $\bar{x} = x$ car $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |z_t - x|^2 &= (z_t - x)(\bar{z}_t - x) \\ &= |z_t|^2 - 2x\Re(z_t) + x^2 \\ &= [(1-t)\Re(z_0) + t\Re(z_1)]^2 + \sqrt{|\Delta'_t|}^2 - 2x[(1-t)\Re(z_0) + t\Re(z_1)] + x^2 \\ &= [\Re(z_0) + t(\Re(z_1) - \Re(z_0))]^2 + |\Delta'_t| - 2x[\Re(z_0) + t(\Re(z_1) - \Re(z_0))] + x^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } |\Delta'_t| = (1-t)(|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) + t(|z_1|^2 - \Re(z_1)^2) + t(1-t)(\Re(z_0) - \Re(z_1))^2$$

$$\begin{aligned} |z_t - x|^2 &= \Re(z_0)^2 + t^2(\Re(z_1) - \Re(z_0))^2 + 2t\Re(z_0)(\Re(z_1) - \Re(z_0)) \\ &\quad + (1-t)(|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) + t(|z_1|^2 - \Re(z_1)^2) \\ &\quad + t(1-t)(\Re(z_0) - \Re(z_1))^2 - 2x[\Re(z_0) + t(\Re(z_1) - \Re(z_0))] + x^2 \\ &= t[2\Re(z_0)(\Re(z_1) - \Re(z_0)) - (|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) \\ &\quad + (|z_1|^2 - \Re(z_1)^2) + (\Re(z_0) - \Re(z_1))^2] - 2xt(\Re(z_1) - \Re(z_0)) \\ &\quad + \Re(z_0)^2 + (|z_0|^2 - \Re(z_0)^2) - 2x\Re(z_0) + x^2 \\ &= t[2x(\Re(z_0) - \Re(z_1)) - |z_0|^2 + |z_1|^2] + x^2 - 2x\Re(z_0) + |z_0|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } |z_t - x|^2 &= \lambda t + \mu \text{ où} \\ \lambda &= 2x(\Re(z_0) - \Re(z_1)) - |z_0|^2 + |z_1|^2 \\ \text{et } \mu &= x^2 - 2x\Re(z_0) + |z_0|^2. \end{aligned}$$

- b)** Dans l'expressions ci-dessus, nous avons la liberté de choisir le réel x et si nous parvenons à le choisir de manière à rendre le nombre λ nul, alors $\forall t \in [0, 1]$, $|z_t - x| = \mu$.

Posons $x_{0,1} = \frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{2(\Re(z_0) - \Re(z_1))}$, qui est bien défini car $\Re(z_0) \neq \Re(z_1)$.

Alors,

$$\forall t \in [0, 1], |z_t - x_{0,1}|^2 = x_{0,1}^2 - 2x_{0,1}\Re(z_0) + |z_0|^2$$

donc $\forall t \in [0, 1], |z_t - x_{0,1}|$ est une constante si bien que

pour tout $t \in [0, 1]$, z_t appartient au cercle de centre $(x_{0,1}, 0)$
et de rayon $\sqrt{x_{0,1}^2 - 2x_{0,1}\Re(z_0) + |z_0|^2}$.

Remarque. On pourrait montrer que le chemin $t \mapsto z_t$ qui relie z_0 à z_1 est le plus court chemin entre ces deux points au sens de la distance hyperbolique. Un tel chemin est une *géodésique*. Dans la géométrie du demi-plan de Poincaré $\mathbb{P}$, les géodésiques sont donc : soit des segments verticaux, soit des arcs de cercle dont le centre est situé sur l'axe des réels.

Partie V : Décomposition des homographies

20. Soit $t \in \mathbb{R}$, On a le développement $(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t}) = (e^{2t} - 1 + 1 - e^{-2t})$.

Ce qui s'écrit : $2\operatorname{ch}(t) \times 2\operatorname{sh}(t) = 2\operatorname{sh}(2t)$, donc

$$\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{ch}(t)\operatorname{sh}(t)$$

21. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 > 0, \text{ donc}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in E \text{ si bien que } \boxed{f_\theta \text{ est une homographie.}}$$

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\theta) & \operatorname{sh}(\theta) \\ \operatorname{sh}(\theta) & \operatorname{ch}(\theta) \end{pmatrix} = \operatorname{ch}^2(\theta) - \operatorname{sh}^2(\theta) = 1 > 0, \text{ donc}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\theta) & \operatorname{sh}(\theta) \\ \operatorname{sh}(\theta) & \operatorname{ch}(\theta) \end{pmatrix} \in E \text{ si bien que } \boxed{g_\theta \text{ est une homographie.}}$$

22. Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

Si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_\theta(z) = f_\varphi(z)$, alors les matrices associées sont en relation $\mathcal{R}$.

Ainsi, d'après la question 8., il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = \lambda \cos \varphi$ et $\sin \theta = \lambda \sin \varphi$.

Nécessairement : $1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \lambda^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \lambda^2$.

Donc $\lambda \in \{-1, 1\}$, et donc on trouve $\theta \equiv \varphi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi + \varphi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \varphi[\pi]$.

Réciproquement, supposons que $\theta \equiv \varphi[\pi]$. Alors soit $\theta \equiv \varphi[2\pi]$, soit $\theta \equiv \varphi + \pi[2\pi]$.

★ Si $\theta \equiv \varphi[2\pi]$, alors $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$ et $\sin(\theta) = \sin(\varphi)$ donc $f_\theta = f_\varphi$.

★ Si $\theta \equiv \varphi + \pi[2\pi]$, alors $\cos(\theta) = \cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$ et $\sin(\theta) = \sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$ donc $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ si bien que les homographies associées sont égales (question II. 8 pour $\lambda = -1$) : $f_\theta = f_\varphi$.

Ainsi, pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, $f_\theta = f_\varphi \iff \theta \equiv \varphi[\pi]$.

23. Raisonnons par analyse-synthèse.

• Supposons qu'il existe $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $x + iy = \lambda g_t(i)$.

Alors $x + iy = \lambda \frac{\operatorname{ch}(t)i + \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{sh}(t)i + \operatorname{ch}(t)}$ donc Dans un premier temps :

$$|x + iy| = \lambda_{>0} \left| \frac{\operatorname{ch} t i + \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh}(t) i + \operatorname{ch} t} \right| = \lambda$$

$$\begin{aligned} x + iy &= \lambda \frac{(\operatorname{ch}(t)i + \operatorname{sh}(t))(-\operatorname{sh}(t)i + \operatorname{ch}(t))}{\operatorname{sh}^2(t) + \operatorname{ch}^2(t)} \\ &= \lambda \frac{2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t) + (\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t))i}{\operatorname{sh}^2(t) + \operatorname{ch}^2(t)} = \lambda \frac{\operatorname{sh}(2t) + i}{\operatorname{ch}(2t)} \end{aligned}$$

si bien que, par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire,

$$\begin{cases} x &= \lambda \frac{\operatorname{sh}(2t)}{\operatorname{ch}(2t)} \\ y &= \frac{\lambda}{\operatorname{ch}(2t)} \end{cases}$$

Puisque $y > 0$, il est possible de multiplier la première équation par $\frac{1}{y}$ (c'est-à-dire de faire le rapport des deux équations membre à membre) pour obtenir

$$\frac{x}{y} = \text{sh}(2t)$$

Or la fonction sh est

- ★ continue sur $\mathbb{R}$,
- ★ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car dérivable de dérivée $\text{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$),
- ★ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$

donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La dernière égalité établie impose donc $t = \frac{1}{2} \text{sh}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ puis nécessairement également $\lambda = y \text{ch}(2t) = y \text{ch}\left(\text{sh}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right)$.

Ainsi, sous réserve d'existence, les scalaires λ et t sont uniques.

- Posons $t = \frac{1}{2} \text{sh}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\lambda = y \text{ch}\left(\text{sh}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = y \text{ch}(2t)$.
 - ★ Par définition, d'une part $t \in \mathbb{R}$ et d'autre part, sachant que $y > 0$ et $\text{ch}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
 - ★ En reprenant des calculs effectués précédemment, et en observant que $\text{sh}(2t) = \frac{x}{y}$,

$$\lambda g_t(i) = \lambda \frac{\text{sh}(2t) + i}{\text{ch}(2t)} = y \text{ch}(2t) \frac{\frac{x}{y} + i}{\text{ch}(2t)} = x + iy = z$$

Par conséquent, il existe au moins un couple $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda g_t(i)$.

Ainsi, il existe un unique couple $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda g_t(i)$.

24. Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit $h \in \mathcal{H}$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $(\theta, \lambda, t) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $h = \lambda g_t \circ f_\theta$.

Une remarque importante : i est un point fixe pour toutes les homographies f_θ ce qui se vérifie par le calcul :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f_\theta(i) = \frac{i \cos \theta - \sin \theta}{i \sin \theta + \cos \theta} = \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$$

ou se déduit de la question II.12.b dans laquelle nous avons explicité toutes les homographies admettant i comme point fixe et il est alors immédiat de vérifier que les homographies f_θ en font partie.

Évaluons la relation $h = \lambda g_t \circ f_\theta$ en i (ce qui a du sens car $i \in \mathbb{P}$) et utilisons que $f_\theta(i) = i$ pour obtenir

$$h(i) = \lambda g_t(i)$$

Or $h(i) \in \mathbb{P}$ donc la question précédente permet d'affirmer que l'égalité ci-dessus détermine $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$ de manière unique :

$$t = \frac{1}{2} \text{sh}^{-1}\left(\frac{\Re(h(i))}{\Im(h(i))}\right) \quad \text{et} \quad \lambda = \Im(h(i)) \text{ch}(2t)$$

Puisque $\lambda \neq 0$ la relation $h = \lambda g_t \circ f_\theta$ impose $\frac{1}{\lambda} h = g_t \circ f_\theta$ et comme les homographies sont des bijections de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, on a $f_\theta = g_t^{-1} \circ \left(\frac{1}{\lambda} h\right)$ ce qui montre que l'homographie f_θ est déterminée et donc unique.

Par ailleurs nous avons établi dans la question 21 que deux homographies f_φ et f_ψ sont égales si et seulement si $\theta \equiv \psi \pmod{\pi}$ ce qui signifie que, pour toute homographie de la forme f_φ , il existe une unique valeur $\varphi_0 \in [0, \pi[$ telle que $f_\varphi = f_{\varphi_0}$. En appliquant ce résultat à l'homographie f_θ ci-dessus, il existe une unique valeur $\theta_0 \in [0, \pi[$ telle que $f_\theta = f_{\theta_0}$, or $\theta \in [0, \pi[$ donc $\theta = \theta_0$ ce qui établit l'unicité de θ .

Ainsi, sous réserve d'existence, le triplet $(\theta, \lambda, t) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est unique.

- **Synthèse.** Posons $t = \frac{1}{2} \text{sh}^{-1}\left(\frac{\Re(h(i))}{\Im(h(i))}\right)$ et $\lambda = \Im(h(i)) \text{ch}(2t)$.

Puisque $h(i) \in \mathbb{P}$, $\mathcal{I}m(h(i)) > 0$ donc $\lambda = \mathcal{I}m(h(i)) \operatorname{ch}(2t) > 0$ (car $\operatorname{ch} > 0$).

Observons alors que, pour $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ (car $\det(H) = \frac{1}{\lambda} > 0$), l'homographie associée est $h_H : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ si bien que $\frac{1}{\lambda}h = h_H \circ h \in \mathcal{H}$ ($z \mapsto \frac{\frac{1}{\lambda}z+0}{0z+1} = \frac{1}{\lambda}z$ par stabilité de $\mathcal{H}$ pour la loi $\circ$).

Notons $u = g_t^{-1} \circ (\frac{1}{\lambda}h)$. u est une homographie (composée de deux homographies).

Calculons $u(i)$ en rappelant que les choix de λ et t ci-dessus garantissent, d'après la question précédente, que $h(i) = \lambda g_t(i)$:

$$u(i) = g_t^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} h(i) \right) = g_t^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \times \lambda g_t(i) \right) = (g_t^{-1} \circ g_t)(i) = i$$

Par conséquent, u est une homographie admettant i comme point fixe donc, d'après la question II-11.c), il existe $(a, c) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$u = h_R \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

Posons $R' = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} R = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$ ce qui a du sens car $(a, c) \neq (0, 0)$ donc $a^2 + c^2 > 0$.

Le nombre complexe $\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} + i \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$ est de module 1 donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} + i \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} = e^{i\varphi}$$

si bien que

$$R' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

On observe alors d'une part que $h_{R'} = f_\varphi$ et d'autre part que la relation de proportionnalité entre R et R' impose (voir

question II-8) $h_R = h_{R'}$ si bien que

$$u = f_\varphi$$

Posons θ l'unique représentant de φ modulo π dans $[0, \pi[$.

- ★ Par définition et construction, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (car $h(i) \in \mathbb{P}$ donc $\mathcal{I}m(h(i)) > 0$ et ch est à valeurs strictement positives) et $\theta \in [0, \pi[$.
- ★ D'après la question V-21, puisque $\varphi \equiv \theta [\pi]$, $f_\theta = f_\varphi$, or nous avons établi que $u = f_\varphi$ donc $u = f_\theta$. Compte tenu de la définition de u ,

$$g_t^{-1} \circ \left(\frac{1}{\lambda} h \right) = f_\theta$$

si bien qu'en composant par g_t à gauche, puis en multipliant par λ

$$h = \lambda g_t \circ f_\theta$$

Par conséquent, il existe au moins un triplet $(\theta, \lambda, t) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda g_t \circ f_\theta$.

Ainsi, pour toute homographie h ,
il existe un unique triplet $(\theta, \lambda, t) \in [0, \pi[\times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda g_t \circ f_\theta$.



□