Devoir Surveillé n°2

Sujet donné le samedi 18 octobre 2025, 4h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Excursion de 4h dans le demi-plan de Poincaré

On note $\mathbb{P}$ le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive :

$$\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

On note E l'ensemble des matrices d'ordre 2 de déterminant strictement positif :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ \det(M) := ad - bc > 0 \right\}.$$

Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, on note h_M l'application :

$$h_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \to & \mathbb{P} \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Une fonction $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ est une *homographie* s'il existe $M \in E$ tel que $f = h_M$. L'ensemble des homographies est noté $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \to & \mathbb{P} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \right\}.$$

1. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $z \in \mathbb{P}$.

a) Montrer que $h_M(z)$ est bien défini.

b) Montrer que $h_M(z) \in \mathbb{P}$.

Cette question permet de justifier a posteriori la définition des homographies proposée en début d'énoncé.

Partie I : Ensembles images

On note h l'homographie associée à l'élément $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $h : z \mapsto \dfrac{2z+3}{-z+1}$.

On considère les ensembles $\Gamma = \left\{ e^{i\theta}, \theta \in]0, \pi[\right\}$, $D = \{-1 + x\,i, \ x > 0\}$ et $\Delta_+ = \left\{ \frac{1}{2} + i\,x, \ x > 0 \right\}$.

2. Montrer que $\Gamma \subset \mathbb{P}$.

3. Sur un même graphique, représenter les ensembles Γ et D.

4. Soit f l'application définie pour tout $\theta \in]0, \pi[$ par $f(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$.

a) Dresser le tableau de variations de f en précisant les valeurs aux bornes de l'intervalle de définition.

b) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Écrire $h\left(e^{i\theta}\right)$ sous forme algébrique.

c) En déduire $h(\Gamma) = \Delta_+$.
On justifiera soigneusement cette égalité ensembliste.

5. Soit $z = -1 + x\,i \in D$.

a) Écrire $h(z)$ sous forme algébrique. On notera $h(z) = X + i\,Y$ où $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\left(X + \frac{3}{4}\right)^2 + Y^2$.

c) En déduire que $h(D)$ est inclus dans une forme géométrique simple dont on précisera les éléments caractéristiques principaux.

Partie II : Structure de $\mathscr{H}$

6. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $I \in E$ et décrire l'application h_I.

7. Déterminer l'ensemble des élements $M \in E$ tels que : $\forall\ z \in \mathbb{P}$, $h_M(z) = z$.

8. On définit sur E la relation binaire : $M \mathscr{R} N$ si $h_M = h_N$.

a) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Soit $M \in E$. Déterminer la classe d'équivalence de M.

9. Soit $(M_1, M_2) \in E^2$, montrer que $h_{M_1} \circ h_{M_2}$ est une homographie.
Plus précisément, montrer $h_{M_1} \circ h_{M_2} = h_{M_1 \times M_2}$
Il s'agit du produit matriciel M_1 par M_2.

10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

a) On suppose, dans cette sous-question, que $\det(M) = 1$. On note $M' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Expliciter $h_M \circ h_{M'}$ et $h_{M'} \circ h_M$. Que peut-on en déduire concernant l'application h_M ?

b) On ne suppose plus que $\det M = 1$. On rappelle toutefois que $\det M > 0$.
Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda M \in E$ et $\det(\lambda M) = 1$.
En déduire que h_M est bijective et déterminer h_M^{-1}.

11. Décrire l'ensemble des homographies h qui satisfont $h(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

12. Soit $M \in E \setminus \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur E pour que h_M admette un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in \mathbb{P}$ tel que $h_M(z) = z$.

13. On considère l'application $\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ & M & \longmapsto & h_M \end{array}$. Indiquez si chacune des assertions suivantes est vraie, en justifiant votre réponse (*par une démonstration ou un contre-exemple*).

a) L'application Φ est injective.

b) L'application Φ est surjective.

c) L'application Φ est bijective.

Partie III : Distance hyperbolique

14. Montrer que pour tous u, $v \in \mathbb{P}$, $|u - v| < |u - \overline{v}|$, puis que $\dfrac{|u - \overline{v}| + |u - v|}{|u - \overline{v}| - |u - v|} \geqslant 1$.

Pour tous u, $v \in \mathbb{P}$, la distance hyperbolique entre u et v, notée $d(u, v)$, est définie par

$$d(u, v) = \ln\left(\frac{|u - \overline{v}| + |u - v|}{|u - \overline{v}| - |u - v|}\right).$$

15. Montrer que pour tout u, $v \in \mathbb{P}$,

a) $d(u, v) \geqslant 0$.

b) $d(u, v) = 0 \iff u = v$.

c) $d(u, v) = d(v, u)$.

On admettra par ailleurs que pour tous u, v, $w \in \mathbb{P}$, $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$.
Ces propriétés montrent que l'application d est une distance sur $\mathbb{P}$.

16. Soit $M \in E$.

a) Pour tous z, $z' \in \mathbb{P}$, exprimer $h_M(z) - h_M(z')$ en fonction de $z - z'$, $ad - bc$, $cz + d$ et $cz' + d$.

b) En déduire que pour tous z, $z' \in \mathbb{P}$, $d(h_M(z), h_M(z')) = d(z, z')$.

On a ainsi démontré que les homographies sont des isométries du demi-plan de Poincaré.

Partie IV : Géodésiques

Soient $z_0,\, z_1 \in \mathbb{P}$.

17. On pose $P_0(X) = X^2 - 2\mathscr{Re}\,(z_0)\,X + |z_0|^2$ et $P_1(X) = X^2 - 2\mathscr{Re}\,(z_1)\,X + |z_1|^2$.
Pour tout $t \in]0,1[$, on note $P_t(X) = (1-t)P_0(X) + tP_1(X)$ et Δ'_t son discriminant réduit (qui vaut $\frac{1}{4}$ du discriminant).

Dans toute la suite, t désigne un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{P}$, $|\mathscr{Re}\,(z)\,| < |z|$.

b) Montrer que $\Delta'_t < -t(1-t)\left(\mathscr{Re}\,(z_0) - \mathscr{Re}\,(z_1)\right)^2$.

c) En déduire que $P_t(X)$ possède une unique racine dans $\mathbb{P}$, notée z_t.

d) Exprimer z_t en fonction de t, $\mathscr{Re}\,(z_0)$, $\mathscr{Re}\,(z_1)$ et Δ'_t.

18. On suppose que $\mathscr{Re}\,(z_0) = \mathscr{Re}\,(z_1)$.
Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, z_t appartient à la droite verticale qui contient z_0 et z_1.
On pourrait montrer que z_t décrit le segment qui relie z_0 à z_1 lorsque t décrit $[0,1]$.

19. On suppose que $\mathscr{Re}\,(z_0) \neq \mathscr{Re}\,(z_1)$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ indépendants de t, que vous préciserez, tels que $|z_t - x|^2 = \lambda t + \mu$.

b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, z_t appartient à un cercle de centre situé sur l'axe des réels.

On peut montrer que z_t décrit précisément l'arc de cercle qui relie z_0 à z_1 sur le cercle décrit précédemment lorsque t décrit $[0,1]$.

Partie V : Décomposition des homographies

Pour tout θ, t réels et $z \in \mathbb{P}$, on note,

$$f_\theta(z) = \frac{\cos(\theta)z - \sin(\theta)}{\sin(\theta)z + \cos(\theta)} \text{ et } g_t(z) = \frac{\mathrm{ch}(t)z + \mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}(t)z + \mathrm{ch}(t)}.$$

20. Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $\mathrm{sh}(2t)$ en fonction de $\mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{sh}(t)$.

21. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que f_θ et g_t sont des homographies.

22. Soient $\theta,\, \varphi \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall\, z \in \mathbb{P},\ f_\theta(z) = f_\varphi(z).$$

23. Soit $z = x + y\,\mathrm{i} \in \mathbb{P}$ écrit sous forme algébrique.
Montrer qu'il existe un unique couple $(\lambda, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda g_t(\mathrm{i})$.

24. Soit $h \in \mathscr{H}$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda, t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times [0, \pi[$ tel que $h = \lambda g_t \circ f_\theta$.