CPGE MPSI
2016-2017

Le 22.06.17

Devoir Surveillé n°11

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

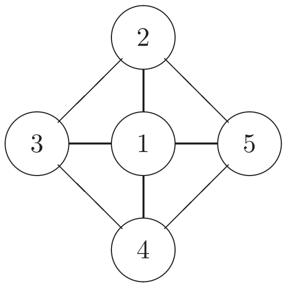
Le devoir est composé d'un exercice d'un problème.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>**.

BON COURAGE

Problème

Marche aléatoire dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Une souris se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si la souris se trouve à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors elle empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve la souris à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

où $\mathbf{P}(A|B)$ désigne la probabilité de A sachant B parfois notée $\mathbf{P}_B(A)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$$

Dans tout le problème, on admet l'existence des probabilités conditionnelles « sachant $(S_k = i)$ » pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![1, 5]\!]$.

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

I. Premiers pas

1. Montrer que $\mathbf{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbf{P}(S_k = i), i = 1 \dots 5)$.
   On précisera soigneusement la formule de probabilité utilisée
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$.
3. En observant les colonnes ou les lignes de la matrice B, montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tBX = X$.

On suppose, **dans la suite de cette partie I**, que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$$

4. Montrer alors que les variables aléatoires S_k ont **toutes la même loi**.
5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?
6. On sait que $S_{10} = 1$.
   (a) Quelle est alors la probabilité que $S_9 = 5$?
   (b) Quelle est la probabilité que $S_8 = 5$?

II. Temps de retour dans la salle numéro 1

Dans cette partie, on suppose que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on s'intéresse au temps du premier retour de la souris en salle 1.
On considère un entier $n \geqslant 2$, on note T_n la variable aléatoire telle que :

$\forall\ k < n, T_n = k$ est l'événement « la souris revient pour la première fois en 1 à l'instant k »

$T_n = n$ est l'événement « la souris n'est pas revenu en salle 1 dans les $n-1$ premiers instants »

1. Que vaut $T_n(\Omega)$. Que dire de $(T_n = 1)$?
2. Calculer soigneusement pour tout $k < n$, la valeur de $\mathbf{P}_{S_{k-1}\neq 1}(S_k = 1)$.
3. En déduire que pour tout $k < n$, $\mathbf{P}_{S_{k-1}\neq 1}(S_k \neq 1) = \dfrac{2}{3}$
4. Montrer alors que pour tout $k < n$, $\mathbf{P}(T_n > k) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$
5. Exprimer alors $\mathbf{P}(T_n = k)$ pour $1 < k < n$, $\mathbf{P}(T_n = 1)$ et $\mathbf{P}(T_n = n)$.
6. Montrer que
   $$\forall\ x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$
   En déduire la valeur de $\mathbf{E}(T_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$.
7. En justifiant que $\mathbf{E}(T_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$ et en exploitant l'inégalité de Markov, donner un majorant de $\mathbf{P}(T_{100} \geqslant 50)$.

III. Du sens probabiliste au calcul $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B^k$

On considère un entier n et V_n la matrice $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B^k$ (avec la convention $B^0 = I_5$).

On note également, pour tout entier $i \in \{1, \dots 5\}$,
A_k^i, la variable aléatoire indicatrice de l'événement : « *la souris se trouve en i à l'instant k* ».
S_n^i la variable aléatoire qui indique le nombre de fois que la souris est passé en salle i durant les n premiers instants.

Dans cette partie, on ne connaît pas a priori la valeur de X_0.

1. Quelle est la loi suivie par A_k^i ?
2. Exprimer $\mathbf{E}(A_k^i)$ en fonction de $\mathbf{P}(S_k = i)$.
3. Comment exprimer S_n^i en fonction des A_k^i ?
   Est-ce que S_n^i suit une loi familière ? (si oui, on précisera laquelle)
4. Donner l'expression simple du vecteur colonne $\big(\mathbf{E}(S_n^i)\big)_i$ en fonction de V_n et de X_0.

IV. Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme notée $\|\cdot\|$.

1. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs E converge vers le vecteur $x_\infty \in E$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - x_\infty\| = 0$. Dans ce cas on note $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x_\infty$.
   Supposons que la suite de vecteurs de E $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_\infty \in E$ et vers $x'_\infty \in E$. Montrer que $x_\infty = x'_\infty$.
   Quel résultat d'analyse réelle vient-on de généraliser ?

   Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que la norme $\|.\|$ sur E satisfait pour tout $x \in E$,
   $$\|u(x)\| \le \|x\|$$

   Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme
   $$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(Id_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$
   où Id_E représente l'endomorphisme identité de E.
2. Soit $x \in \ker(u - Id_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.
3. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - Id_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
4. En déduire que $E = \ker(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E)$.
5. Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Justifier que p est un endomorphisme de E et interpréter géométriquement p.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \le \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice
$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$
où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pourra noter a l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $a \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$

6. Montrer qu'il existe une matrice P vérifiant $P^2 = P$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(R_kX)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers PX.

V. Matrices stochastiques

Notation. *Pour toute matrice* $M \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ *(*$(m,p) \in \mathbb{N}^{*2}$*), pour tout* $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$*, on notera* $M_{i,j}$ *ou* $[M]_{i,j}$ *le coefficient* (i,j) *de* M.

Définition 1. *On notera* $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *la matrice colonne dont tous les coefficients valent* 1.

Définition 2. *Une matrice carrée* $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} \geq 0 \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1 \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *est stochastique lorsque ses coefficients* λ_i *sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à* 1.

On notera $\mathcal{E}_n$ *l'ensemble des matrices stochastiques carrées réelles d'ordre* n.

Définition 3. *Une suite* $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *converge vers une matrice* $M_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *si, pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty} [M_k]_{i,j} = [M_\infty]_{i,j}$ *(convergence des* n^2 *suites des coefficients des matrices* M_k *vers les coefficients correspondants de la matrice* M_∞*).*

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

1. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ est stable pour le produit matriciel.
3. Montrer que, si une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices stochastiques converge vers une matrice $M_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors M_∞ est stochastique.

   On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Dans les questions qui suivent et jusquà la fin de cette partie, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

   $$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l$$
5. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

   Indication : soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \ker(A^p - I_n)$*, soit* $s \in [\![1,n]\!]$ *un indice tel que* $x_s = \max\limits_{1\leq j\leq n} x_j$*, on montrera que* $x_j = x_s$ *pour tout* j*.*
6. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
7. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
8. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique de rang 1.
9. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.
10. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
11. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs. *On pourra pour cela simplifier* LA^p*.*

VI. Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie **I** en exploitant les résultats de la partie **V**.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie **I**.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

1. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par l'identité (2) de la partie IV.
2. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1,5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle la probabilité de présence de la souris dans une salle soit la même à tous les instants).