Chapitre 14

# Construction d'ensembles numériques : des entiers à la droite réelle

**Résumé -**

*Ce chapitre est comme une application du chapitre sur les relations pour donner une assise mathématique satisfaisante aux ensembles bien connus des élèves car largement utilisés. Dans l'histoire, ces constructions se sont passés à la fin du XIX siècle. Cela faisait des siècles (voire des millénaires) que certains de ces ensembles étaient exploités...*

*Il n'y a au fond qu'un seul problème : comment donner du sens aux ensembles :* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *?*

*Quelques vidéos sur internet :*

- *Yvan Monka - Ils sont fous, ces nombres ! - Classification - https ://www.youtube.com/watch ?v=kL-eMNZiARM*
- *Exo7Maths - Nombres réels - https ://www.youtube.com/watch ?v=NCWWVven9Cs*
- *Science4all - La diagonale dévastatrice de Cantor - https ://www.youtube.com/watch ?v=xqSKawORrPo*


## Sommaire

# 1. Problèmes

### ? Problème 65 - Construction des entiers naturels

Au milieu du XIXième siècle, les mathématiciens se sont rendus compte que leurs sens leur faisaient défaut lorsqu'ils ont découvert les géométrie non euclidienne. Il a fallu tout reconstruire sur des bases très solides. Comment construire l'ensemble des entiers sans équivoque !

### ? Problème 66 - Construction des entiers relatifs, des rationnels

Une fois que les entiers $1, 2, 3\dots$ sont définis, ainsi que le $0$, comment définir proprement les nombres entiers négatifs.
A savoir que dans l'histoire, les fractions sont apparues bien avant les nombres négatifs !
Nous verrons en algèbre générale qu'il est souvent préférable d'avoir un corps plutôt qu'un anneau (tous les éléments sont inversibles).
Comment définir alors proprement l'ensemble des fractions $\frac{a}{b}$ et justifier l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors que $a \neq c$ et $b \neq d$ ?
Une fois que la construction est acquise (avec les lois $+$ et $\times$), comment généraliser sur $\mathbb{Q}$ la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{Z}$ ?

### ? Problème 67 - Construction des réels

Pour le familier de la calculatrice (ou de Python), les nombres réels sont obtenus en écrivant les nombres décimalement quitte à ce que cette écriture soit infini. Cela marche bien ; la preuve : le sur-développement des ordinateurs et autres objets numériques.
Comment faire cette construction et surtout comment gérer la problématique $1 - 0,999\dots 9\dots = 0$, donc la non unicité d'écriture de certains nombres réels.
Là aussi : comment définir la relation d'ordre ?

### ? Problème 68 - Construction des réels

Une autre possibilité : exploiter le principe de la dichotomie. Cela rappelle la méthode des coupures de DEDEKIND, en séance de cours-TP.
Pouvons-nous dès maintenant anticiper cette méthode ?

### ? Problème 69 - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

La construction de $\mathbb{R}$ conduit à voir tous les éléments de $\mathbb{R}$ comme limite d'éléments de $\mathbb{Q}$.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (associé à la continuité, c'est une propriété très forte !).
Et pourtant, les cardinaux de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont-ils comparables ? Existe-t-il une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$ ? de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ ?

# 2. Nombres algébriques

## 2.1. Nombres entiers

**Nombres entiers naturels**

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

**Heuristique - Nombres entiers naturels**

La construction suivante est dûe à Péano. Soit $E$ un ensemble non vide, possédant un élément de référence et dont tous les éléments ont un unique successeur (différent de l'élément de référence).
Cet élément de référence se note 0 (ou 1, selon). Puis on définit l'addition $+1$ comme le passage d'un nombre à son successeur.
On a ainsi les bases pour un raisonnement par récurrence et l'ensemble des entiers.
Ce qui suit est en fait assez naturel, même si cela peut paraître un peu compliqué la première fois qu'on le voit...

**Théorème - Construction de Péano**

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi $s$ (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- $s$ est injective ($s(a) = s(a') \Rightarrow a = a'$)

**Remarque - Addition $+1$**

$s(a)$ correspond à la classique addition $+1$.
L'habitude consiste à associer à l'élément $s \circ s \circ \cdots s(0)$, le nombre $n$ égal au nombre de fois que $s$ est utilisé

**Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$**

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a + b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.
On a $a + b = b + a$.
La multiplication est alors la répétition de l'addition : $a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$
On a $a \times b = b \times a$.

**Proposition - Relation d'ordre**

$\mathbb{N}$ est naturellement ordonné (récursivement) :
$$\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*,\ a \leqslant b \Longleftrightarrow s^{-1}(a) \leqslant s^{-1}(b).$$
L'ordre est total.

Et il existe un algorithme, qui termine, permettant de connaître le plus petit entre $a$ et $b$ :

**Informatique - Ordre**

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    while c>0 and d>0 :
        c,d=c-1,d-1
    if c==0:
        return(a)
    else :
        return(b)
```

**Nombres entiers naturels**

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

### Heuristique - Problématique

La problématique : l'addition à trou (ou recherche d'une opération réciproque) n'est qu'à moitié possible. En effet, elle dépend de la relation d'ordre entre les nombres soustraits.
Il faut donc créer un premier ensemble, afin que toute soustraction de nombres entiers soit possible.
Mais certaines soustractions peuvent conduire à un « même » résultat

Exercice
Sur $\mathbb{N}^2$,

1. Montrer que $\sim_1$ définie par :
$$(a,b) \sim_1 (c,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a+d = c+b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout couple $(a,b)$ est dans la classe d'un couple $(0,d)$ ou $(d,0)$ selon que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$
3. En déduire la construction de $\mathbb{Z}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$

### Exemple - Le nombre $-2$

**Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$**

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :
$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$
L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$
La multiplication est plus compliquée :
$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$

### Remarque - La difficulté : l'indépendance au représentant

Il faut bien vérifier que chacune de ces définitions est indépendantes du représentant de la classe d'équivalence.
Ainsi : si $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ et $\overline{(c,d)} + \overline{(c',d')}$,
alors $(a+c)+(b'+d') = (a+b')+(c+d') = (a'+b)+(c'+d) = (a'+c')+(b+d)$.
donc on a bien : $(a+c, b+d) \sim_1 (a'+c', b'+d')$.
Ainsi la définition de $+_{\mathbb{Z}}$ est bien indépendante des représentants choisis.

### Exemple - Multiplication

**Démonstration**

Exercice

Montrer que l'ordre est total

## 2.2. Nombres rationnels

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Exercice

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

1. Montrer que $\sim_2$ définie par :

$$(a,b) \sim_2 (c,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \times_{\mathbb{Z}} d = c \times_{\mathbb{Z}} b$$

est une relation d'équivalence.

2. Montrer la construction de $\mathbb{Q}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$
3. Montrer que $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie par $(a,b) \leqslant_{\mathbb{Q}} (c,d)$ ssi $a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c$ définie bien une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$
4. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

**Proposition - Opération sur $\mathbb{Q}$**

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*}{\sim_2}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ de la loi $\sim_2$).

On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} c \times_{\mathbb{Z}} b$$

La multiplication est alors simplement : $\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Q}} d)}$

L'addition est plus compliquée : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d)}$.

L'ordre est total (démonstration comme pour comme pour $\leqslant \mathbb{Z}$).

***Pour aller plus loin - Comment définir $\pi$ simplement?***

*Nous savons que le périmètre d'une forme régulière est proportionnel à son agrandissement.*
*Donc pour un cercle, il existe une constante telle que son périmètre est égale au produit de cette constante par le diamètre : $p = C \times d$. Par définition, on peut appeler pi1 $\pi_1$ cette constante.*
*Ou bien, de même nous savons que la surface d'une forme régulière est proportionnel au carré de son agrandissement.*
*Donc pour un disque, il existe une constante telle que son aire est égale au produit de cette constante par le carré du rayon : $S = C' \times r^2$. Par définition, on peut appeler $\pi_2$ cette constante.*
*L'enjeu : montrer que $\pi_1 = \pi_2$...*

***Pour aller plus loin - Généralisation***

*Ce principe qui permet de passer de l'anneau $\mathbb{Z}$ au corps des fractions $\mathbb{Q}$ est un principe régulièrement repris en mathématiques.*
*On suivra exactement ce même principe pour décrire le corps des fractions de polynômes $\mathbb{K}(X)$ à partir de l'anneau des polynômes : $\mathbb{K}[X]$*

### 2.3. Nombres algébriques

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors :

**Définition - Nombre algébrique**
Un nombre $r$ est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale $P$ à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si $n$ est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que $r$ est algébrique d'ordre $n$

***Pour aller plus loin - Nombres irrationnels***
*Ce fut un choc dans l'antiquité lorsqu'on compris que $\sqrt{2}$, qui existe bien (longueur de la diagonale du carré de côté $1$), n'est pas une nombre rationnel. Quel type de nombre est-ce ?*
*Si l'on considère des nombres irrationnels (i.e. non rationnels) dans leur singularité, on n'en trouve pas beaucoup, ils sont en effet difficile à définir.*

**Exemple - Nombres rationnels**

**Exemple - Nombres quadratiques**

D'autres nombres, toujours « naturels » ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de $\pi$ ou de $e$.

**Définition - Nombre transcendant**
Si $r$ n'est pas algébrique, on dit qu'il est transcendant.

Démontrer qu'un nombre donné est transcendant n'est pas une mission évidente.

***Pour aller plus loin - Problème ouvert***
*Est-ce que $\gamma$ est un nombre transcendant ou algébrique ?*
*Par définition, $\gamma = \lim(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$*

## 3. Construction de $\mathbb{R}$

### 3.1. Couple de suites bissecantes

**Heuristique - Un ensemble ordonné, sans trou**
La bonne idée : il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, sans trou. Le schéma mental associé est donc celle de la ligne droite orientée (avec une origine et un sens).
Le théorème clé sur le nombre réel est alors le théorème des valeurs intermédiaires, vus en classe de seconde.
Pour « démontrer » ce théorème, une excellente idée est d'exploiter la dichotomie, que nous appellerons, selon la tradition mathématiques, la bissection. Nous construirons $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et de cette méthode algorithme de bissection.

***Pour aller plus loin - Coupures de Dedekind***
*La méthode des bissecantes proposée ici est propre à ce cours, efficace, mais un peu bricolée (même si c'est un beau bricolage ;-). )*
*On aurait pu reprendre les coupures de* DEDEKIND, *méthode plus aboutie, peut-être.*
*Une coupure (de $\mathbb{Q}$) est un couple $(A, B)$ de parties de $\mathbb{Q}$ tel que $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall\, a \in A, b \in B$, $a \leqslant_Q b$ et enfin tel que $A$ n'admet pas d'élément maximal (dans $A \subset Q$).*
*Ce couple définit un rationnel si $B$ admet un élément minimal (cet élément) et un réel si $B$ n'admet pas d'élément minimal.*
*On verra un exemple plus loin*

On considère $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{Q}$.

**Définition - Suites bissecantes de rationnels**
Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de rationnels.
On dit que le couple $\big((a_n), (b_n)\big)$ forme un couple de suites (de rationnels) bissecantes si :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n$ et $b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$
   La suite $(a_n)$ est croissante, $(b_n)$ est décroissante et $(b_n)$ majore $(a_n)$

3. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

**Exemple - Dichotomie et $\sqrt{2}$**

***Pour aller plus loin - Coupures de Dedekind. Exemple***
*On note $A = \{\frac{p}{q} \mid pq < 0$ ou $p^2 < 2q^2\}$ et $B = \{\frac{p}{q} \mid p^2 \geqslant 2q^2\}$.*
*Par construction : $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall\ a \in A, b \in B$, $a \leqslant_Q b$ car $a^2 \leqslant 2 \leqslant b^2$.*
*$A$ n'admet pas d'élément maximal (exercice plus loin - non trivial sans indication). Cette coupure définit le nombre $\sqrt{2}$, réel car $B$ n'admet pas d'élément minimal.*

**Démonstration**

Par récurrence :

**Proposition - Ecart tendant vers 0**
Soit $\big((a_n),(b_n)\big)$ un couple de suites bissecantes.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

**Heuristique - $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Et « quotientage »**

Nous savons que cet exemple nous donne deux suites qui convergent vers $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnels (alors qu'il s'agit bien de suite de rationnels).
Nous cherchons à définir les nombres réels comme limite de telles suites. Mais un nombre réel peut être limite de deux couples de bissecantes distincts. Nous allons donc devoir quotienter, c'est-à-dire reconnaître comme égales deux suites qui conduisent au même nombre.

## 3.2. Construction de $\mathbb{R}$

**Lemme**

Avant cela commençons par un lemme.

**Lemme -**
Considérons quatre suites de rationnels $(a_n)$, $(c_n)$, $(d_n)$ et $(f_n)$ telles que $(a_n)$ est croissante, $(f_n)$ décroissante et $\big((c_n),(d_n)\big)$ un couple de bissecantes.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$ et $c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$

**Démonstration**

**Ensemble quotienté**

A partir de ce lemme, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de la relation d'équivalence suivante

**Définition - Relation d'ordre sur les couples de bissecantes**
On considère deux couples de suites bissecantes $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$.
On dit que $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((c_n),(d_n)\big)$ si

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n \text{ et } a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.
On dira par la suite que $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$ définissent le même réel.

**Démonstration**

**Définition - Ensemble $\mathbb{R}$**
On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des classes de similarité définies sur l'ensemble des couples de bissecantes.
Formellement :

$$x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists\ \big((a_n),(b_n)\big) \text{couple de bissecantes tel que } x = \overline{\big((a_n),(b_n)\big)}$$

On notera $x = \begin{cases} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{cases}$ ou encore $\begin{matrix} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{matrix} x$.
Il sera donc toujours sous-entendu que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n, b_n \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

**Savoir faire - Manipuler des nombres réels**
On peut donc écrire :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(a_n),(b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

(avec $0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$).

Il reste à placer géométriquement $x$... Pour cela on exploite la relation d'ordre :

## 3.3. Relation d'ordre

**Définition - Relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$**
On considère deux nombres de $\mathbb{R}$, $x$ et $y$.
On dit que $x$ est inférieur à $y$, noté $x \leqslant y$, si

pour tous couples $\begin{matrix} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{matrix} x$ et $\begin{matrix} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{matrix} y$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant_Q d_n$.

Il s'agit d'une relation d'ordre.

**Démonstration**

**Proposition - L'ordre est total**
Cette relation d'ordre est total. Si $x, y \in \mathbb{R}$, alors ou bien $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$.

**Démonstration**

**Heuristique - Extension du cas rationnel**

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \overline{\left((x), (x + \frac{1}{2^n})\right)} \in \mathbb{R}$. Donc d'une certaine façon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Puis si $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$, alors $x \leqslant y$.
Donc la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$, prolonge cela définie sur $\mathbb{Q}$.
On peut donc garder la même représentation en passant de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.
C'est la représentation d'un droite pointillée qui devient ligne continue.

En fait, l'évolution précise de la taille des suites d'intervalle $([a_n, b_n])$ ne joue pas un rôle important (le $\frac{1}{2}$ de la définition). Et même la nature des points $a_n$ et $b_n$ importe peu (nombres rationnels ou nombres irrationnels).

**Théorème - Segments emboités rationnels**
Si $([a_n, b_n])$ est une suite de segments emboîtés de $\mathbb{Q}$,
i.e. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$,
et de longueur qui tend vers 0 :
i.e. $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ m \in \mathbb{N}$ tq $(\forall\ p \in \mathbb{N}) : 0 (\leqslant b_{m+p} - a_{m+p}) \leqslant b_m - a_m \leqslant \epsilon$.
Alors $\exists\,! x \in \mathbb{R}$ tq $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, noté : $x \in [a_n, b_n]$

**Heuristique - Principe de la démonstration**

On considère une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ emboîtés rationnels qui tend vers 0.
Nous allons extraite des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites appelées $(A_n)$ et $(B_n)$ bissecantes.
Le réel $x$ définie par ces suites sera le nombre recherché.
Il est unique : si on en considère un second, associée à des suites de bissecantes. On montre qu'elles sont similaires à $\left((A_n), (B_n)\right)$ en exploitant le fait que ces dernières sont extraites de $(a_n)$ et $(b_n)$

**Démonstration**

## 3.4. Corps $\mathbb{R}$

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques.

**Définition - Addition sur $\mathbb{R}$**
Si $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$ sont deux suites bissecantes.
Alors $\big((a_n+c_n),(b_n+d_n)\big)$ est également bissecante.
On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$ :

$$x+y=\left\{\begin{array}{l}(b_n)\searrow\\(a_n)\nearrow\end{array}\right.+\left\{\begin{array}{l}(d_n)\searrow\\(c_n)\nearrow\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{l}(b_n+d_n)\searrow\\(a_n+c_n)\nearrow\end{array}\right.$$

On étend la soustraction par addition avec un nombre négatif (i.e. plus petit que 0, ie $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqslant_{\mathbb{Q}} 0$ ou de manière équivalente : $\exists\ n\in\mathbb{N}$ tel que $b_n\leqslant_{\mathbb{Q}} 0$).

**Démonstration**

Concernant la multiplication, on exploite les segments emboîtés. Mais on est obligé de procéder en plusieurs temps (selon le signe du nombre) pour définition :

**Définition - Multiplication sur $\mathbb{R}$**
Produit sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \times y = 0$.
Si $0 < x = \begin{cases} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{cases}$ et $0 < y = \begin{cases} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{cases}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} > 0$ et $c_{n_0} > 0$,
la suite $([a_n c_n, b_n d_n])_{n \geqslant n_0}$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.
Il existe un unique réel dans chaque $[a_n c_n, b_n d_n]$, il s'agit de $x \times y$.
Si $x < 0$ ou $y < 0$, alors on considère les suites opposées...

Exercice
A démontrer

Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

**Définition - Inverse sur $\mathbb{R}$**
Inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $0 \leqslant x = \begin{cases} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{cases}$ et $x \neq 0$.
On peut supposer que $a_n > 0$, à partir d'un certain rang. SPDG, on suppose que ce rang est $n_0 = 0$.
Alors la suite $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right]\right)$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.
Il existe un unique réel dans chaque $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right]\right)$, il s'agit du nombre $\frac{1}{x}$.
Si $x \leqslant 0$ et $x \neq 0$, on considère l'opposée de l'inverse de l'opposé de $x$...

Exercice
A démontrer

**Compatibilité opératoire avec $\leqslant$**

On admet les deux premières propositions suivantes. Elles découlent de la construction de $\mathbb{R}$.

**Proposition - Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations usuelles**
La relation d'ordre usuelle $\leqslant$ est compatible avec les opérations + et × :

$$\begin{array}{lccc} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, & x \leqslant y & \Longrightarrow & x + z \leqslant y + z \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \underline{\mathbb{R}_+}, & x \leqslant y & \Longrightarrow & xz \leqslant yz \end{array}$$

**Démonstration**

On en déduit les règles classiques sur la manipulation des inégalités :

Exercice

Montrer les règles d'usage suivantes :

$$\begin{array}{llcl}
\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, & \begin{cases} x \leqslant y \\ x' \leqslant y' \end{cases} & \Longrightarrow & x + x' \leqslant y + y' \\
\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, & \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x' \leqslant y' \end{cases} & \Longrightarrow & xx' \leqslant yy' \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & x \leqslant y & \Longrightarrow & -y \leqslant -x \\
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & 0 < x \leqslant y & \Longrightarrow & 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}
\end{array}$$

## 3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

**Valeur absolue**

**Définition - Valeur absolue**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus grand des deux réels $x$ et $-x$).

$d(x,y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels $x$ et $y$ de la droite réelle.

**Définition - Partie positive, partie négative**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x, 0)$ (partie positive du réel $x$)

et $x^- = \max(-x, 0)$ (partie négative du réel $x$).

Ces deux réels sont POSITIFS.

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de $x^+$ et $x^-$.

Ecrire $x^+$ en fonction de $|x|$ et de $x$.

**Proposition - Encadrements à connaître**

$|x| \leqslant M \Longleftrightarrow -M \leqslant x \leqslant M$

$|x| \geqslant M \Longleftrightarrow (x \geqslant M \text{ ou } x \leqslant -M)$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x|\,|y|$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d(x,y) \geqslant d(|x|,|y|)$ ou $|x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$

**Démonstration**

**Partie entière**

**Proposition - Corps archimédien**
Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall\ (a, A) \in\in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \qquad \exists\ n \in \mathbb{N},\ \text{tel que } na \geqslant A$$

Avec $a = 1$, cela conduit à la définition :

**Définition - Partie entière**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leqslant x < n+1$.
$n$ s'appelle la partie entière de $x$, on la note $\lfloor x \rfloor$. On a donc

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

**Démonstration**

Exercice
Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

**Savoir faire - Travailler avec la partie décimale**

Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale $\theta$ : $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
On voit que $\theta(x) \in [0,1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice

Pour tout réel $x$, déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

# 4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie

## 4.1. Bornes supérieure et inférieure

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés ici au cas réel :

***Pour aller plus loin - Rappels***
*Un majorant $M$ est le plus grand élément de $A$ si et seulement si il appartient également à $A$. Un minorant $m$ est le plus petit élément de $A$ si et seulement si il appartient à $A$*

**Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné**
Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :
- $A$ est majoré s'il existe un réel $M$ tel que, pour tout $x$ de $A$, on ait $x \leqslant M$.
  $M$ est alors un majorant de $A$.
- $A$ est minoré s'il existe un réel $m$ tel que, pour tout $x$ de $A$, on ait $m \leqslant x$.
  $m$ est alors un minorant de $A$.
- Si $A$ est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

**Remarque - Ensemble $\mathbb{N}$**
Pour l'ensemble $\mathbb{N}$, on a quelques propriétés :
- Tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Ce résultat n'est pas vrai si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{R}$.
Rappels :

***Pour aller plus loin - Récurrence***
*C'est la première propriété ici (avec un raisonnement par l'absurde) qui permet de montrer l'exactitude du raisonnement par récurrence (et aussi de la descente infinie) et aussi la méthode du variant de boucle en informatique.*

**Définition - Borne inférieure, borne supérieure**
Soit $A \subset \mathbb{R}$.
- Si l'ensemble des majorants de $A$ est non vide
  et si il admet un plus petit élément $a$,
  alors $a$ est appelé borne supérieure de $A$, on note $a = \sup A$.
  Formellement :
  $$\sup A := \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \leqslant M\} \text{ (si non vide)}$$
- Si l'ensemble des minorants de $A$ est non vide
  et si il admet un plus grand élément $b$,
  alors $b$ est appelé borne inférieure de $A$, on note $a = \inf A$.
  Formellement :
  $$\inf A := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \geqslant m\} \text{ (si non vide)}$$

**Attention - Borne supérieure**

Comme son nom ne l'indique pas, la borne supérieure est par définition le plus **petit** élément d'un certain ensemble (celui des majorants).

L'exercice suivant donne des exemples à toujours bien garder dans un coin de sa tête...

Exercice

Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure (sur ℝ) des parties suivantes :

$$A = [0,1], \quad B = [0,1[, \quad C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

**Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que $A$ possède un plus grand élément $a$ (resp. plus petit élément $b$).
Alors $A$ possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

**Savoir faire - Etudier une borne supérieure**

En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalités :

— $\forall\ a \in A,\ a \leqslant \sup A$ (minoration de $\sup A$)
— $\forall\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ a \in A,\ a \leqslant M$, alors $M \geqslant \sup A$
(majoration de $\sup A$, par tous les majorants de $A$)

On a évidemment des relations symétriques pour la borne inférieure...

Exercice

Soient $A$ et $B$ deux parties de ℝ admettant des bornes supérieures. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B.$$

Donner un résultat similaires avec les bornes inférieures.

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire :

**Proposition - Caractérisation de la borne sup.**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \sup A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ a \in A,\ a \leqslant x \\ \forall\ \epsilon > 0, \exists\ a_\epsilon \in A \mid, x - \epsilon < a_\epsilon \end{cases}$$

**Proposition - Caractérisation de la borne inf.**

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
Alors $x = \inf A$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ x \leqslant a \\ \forall \epsilon > 0, \exists a_\epsilon \in A \mid a_\epsilon < x + \epsilon \end{cases}$$

**Démonstration**

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$. Nous en avons vu la démonstration dans le cours-TD (il faut une défintion pour $\mathbb{R}$)

**Théorème - Existence de la borne supérieure**
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

***Pour aller plus loin - Démonstration de ce résultat***

*$E = \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r^2 < 2\}$ n’admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ en considérant $s = \frac{p}{q} \mapsto \frac{3p+4q}{2p+3q}$.*
*Si $s = \frac{p}{q} \in E$, alors $\frac{p^2}{q^2} < 2$ et $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \in \mathbb{Q}$.*
*Par ailleurs, $s^2 < s'^2 < 2$.*
*En effet : $s' > 0$ et $s < s' \Leftrightarrow p(2p+3q) < q(3p+4q) \Leftrightarrow 2p^2 < 4q^2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$*
*et $s'^2 < 2 \Leftrightarrow (3p+4q)^2 < 2(2p+3q)^2 \Leftrightarrow 9p^2 + 16q^2 + 24pq < 8p^2 + 18q^2 + 24pq \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} < 2$*
*Par conséquent, si $s = \frac{p}{q}$ est le plus petit des majorants de $E$, alors nécessairement $s \notin E$.*
*Mais de même si $s = \frac{p}{q} \notin E$, alors $\frac{p^2}{q^2} > 2$ puis $s' = \frac{3p+4q}{2p+3q} \notin E$ est un majorant plus petit !*
*Il n’est donc pas possible de trouver un majorant, le plus petit, de $E$ dans $\mathbb{Q}$.*

**Attention - Propriété non vérifiée par $\mathbb{Q}$**
Cette propriété différencie $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ :
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), que l’on notera : $\sqrt{2}$
- mais $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ n’admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (non existence d’un plus petit élément dans $\mathbb{Q}$ de l’ensemble des majorants rationnels).

**Heuristique - Manipuler l’ensemble des majorants et non l’ensemble $E$ lui-même**

L’ensemble $E$ peut être très compliqué, un ensemble à trous par exemple $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[(1+\frac{1}{n})^n - \frac{1}{n^2}; (1+\frac{1}{n})^n + \frac{1}{n^2}\right]$.
Il vaut mieux raisonner sur l’ensemble des majorants $\mathcal{M}$ : celui-ci est nécessairement un intervalle :
Mieux (mais on ne le sait pas encore) il s’agit de l’intervalle fermé $[\sup E, +\infty[$.

Exercice
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{M}(A)$, l’ensemble des majorants de $A$.
A quoi ressemble $\mathcal{M}(A)$ ?

**Démonstration**

> **Corollaire - Critère de nullité d'un nombre**
> Un réel $a$ vérifiant $\forall \epsilon > 0, |a| \leqslant \epsilon$ est nul.

**Démonstration**

On avait déjà fait une démonstration ici par contraposée.

### 4.2. Densité de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

**Ensemble $\mathbb{D}$**

**Définition - Ensemble des décimaux**
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On dit que $x$ est un nombre décimal s'il existe $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^n}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

**Remarque - Un nombre décimal...**
... c'est tout simplement un nombre qui s'écrit avec une virgule et une fin dans le développement.
Par exemple : $25,456394 = \dfrac{25\,456\,394}{10^6}$

**Définition - Valeur décimale approchée**
Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\dfrac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{10^n}$,
on dit que $\dfrac{p}{10^n}$ (resp. $\dfrac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de $x$ à la précision $10^{-n}$.

**Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$) est une valeur approchée de $x$ par défaut (resp. par excès) à la précision $10^{-n}$.

**Démonstration**

**$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$**

**Heuristique - Une partie dense?**
Une partie $X$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec les propres de $X$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

**Analyse - Vers une définition équivalente**

**Définition - Partie dense dans $\mathbb{R}$**
Une partie non vide $X$ de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$
si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide,
c'est-à-dire si pour deux réels $a$ et $b$, $a < b$, il existe $x \in X \cap ]a, b[$.

**Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$**
$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, on en déduira la densité de $\mathbb{Q}$

**Démonstration**

Par l'absurde :

**Corollaire -**
Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient donc au moins un rationnel et un irrationnel. On en déduit qu'il y a un rationnel (ainsi qu'un irrationnel) « aussi proche que l'on veut » d'un réel $x$ donné :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}, |x-r| < \epsilon, \qquad \exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x-\xi| < \epsilon$$

# 5. Bilan

**Synthèse**

- ⇝ Les ensembles numériques classiques (de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$), se déduisent les uns des autres à partir de relation d'équivalence, qui permet d'étendre la relation d'ordre $\leqslant$ toujours totale sur chaque ensemble. Au commencement, l'ensemble $\mathbb{N}$ est la répétition (récursive) de l'addition $+1$.
- ⇝ Nous proposons ici une construction originale et complète de $\mathbb{R}$, à partir de suite de bissecantes de rationnels. Le processus n'est pas nécessairement à retenir, mais il permet de TOUT démontrer, là où le programme demande d'admettre le théorème de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.
- ⇝ On termine par définir la fonction valeur absolue, la partie entière sur $\mathbb{R}$. On étend aussi la notion d'intervalle numérique en sur-ensemble et sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

**Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre**

- — Savoir-faire - Manipuler des nombres réels
- — Savoir-faire - Travailler avec la partie décimale
- — Savoir-faire - Etudier une borne supérieure

## Notations

| *Notations* | *Définitions* | *Propriétés* | *Remarques* |
|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | Valeur absolue de $x$, $\lvert x\rvert = \max(x,-x)$, | $\lvert x\rvert \geqslant 0$ | On note $x_+ = \max(x,0)$, $x_- = \max(-x,0)$. Alors $\lvert x\rvert = x_+ + x_-$, $x = x_+ - x_-$ et $x_+ \geqslant 0$, $x_- \geqslant 0$ |
| $\lfloor x\rfloor$ | Partie entière de $x$. $\lfloor x\rfloor = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant x\}$ | $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{N}$ et $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ | On note $\theta = x - \lfloor x\rfloor \in [0,1[$, partie fractionnaire ou décimale de $x$. |
| $\sup A$ | Borne supérieure de $A$. | Le plus PETIT des éléments plus grand que TOUS les éléments de $A$ | $m = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ a \in A, a \leqslant m \\ M \geqslant a, \forall\ a \in A \Rightarrow M \leqslant m \end{cases}$ |

## Retour sur les problèmes

65. Par récurrence...
66. Vu en cours (avec deux relations d'équivalence)
67. Vu en cours (avec une relation d'équivalence)
68. Vu en TD-cours
69. Bien que $\overline{Q} = \mathbb{R}$, on a une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, mais pas de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$.
D'après un théorème de Bernstein, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$.
On peut prendre $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, $(\frac{a}{b}) \mapsto 2^{[a\geqslant 0]}3^{|a|}5^{b}$, injective (non surjective),
on voit qu'en fait pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^q$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ (infinité de nombres premiers).
Par ailleurs, si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ bijective. On note $\varphi(i) = x_i = 0, x_1^i x_2^i \dots x_n^i \dots \in [0,1]$ (écriture décimale)
Considérons alors le nombre $X = 0, X_1 X_2, \dots X_n \dots$ tel que $X_i \equiv \varphi(i)_i + 5[10]$.
Nécessairement, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi(i)_i \neq X_i$, donc $\varphi(i) \neq X$.
Ainsi $\varphi$ n'est pas surjective. Contradiction.