Devoir à la maison n°12
CORRECTION

Exercice 1 - Stratégie

A. Suites d'épreuves de Bernoulli.

1. Soit $i \in \mathbb{N}_n$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$, donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X_i) = p \text{ et } \mathbf{V}(X_i) = p(1-p)}$$

2. Notons que $X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$ est une variable aléatoire qui indique le nombre de succès entre les instants k et n.
   Lorsque l'on suit la stratégie indiquée, les résultats des expériences 1 à $k-1$ sont sans influence et trois cas de figure peuvent se produire :
   — Il n'y a aucun succès dans les épreuves k à n, dans ce cas $X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 0$ et la stratégie n'aura pas été gagnante.
   — Il n'y a un seul succès dans les épreuves k à n, dans ce cas $X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 1$ et la stratégie a été gagnante.
   — Il y a plus d'un succès dans les épreuves k à n, dans ce cas $X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n > 1$ et la stratégie n'aura pas été gagnante puisque le joueur aura pronostiqué le premier de ces succès, alors qu'il fallait trouver le dernier succès, celui-ci se réalisant à un moment différent de celui-là.
   Ainsi

$$\boxed{G_k \text{ est équivalent à l'événement } (X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 1).}$$

3. Notons $Y_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$. Y_k mesure donc le nombre de succès lors de la répétition de $n-k+1$ épreuves de Bernoulli de même paramètre p, ces épreuves étant indépendantes.
   Donc Y_k suit la loi binomiale de paramètres $(n-k+1, p)$:

$$\boxed{Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n-k+1, p)}$$

4. On sait alors que $\mathbf{P}(Y_k = 1) = \binom{n-k+1}{1} p^1 (1-p)^{n-k+1-1}$, donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_k = 1) = (n-k+1)pq^{n-k}}$$

5. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.
   $a_{k-1} = (n-(k-1)+1)pq^{n-(k-1)} = (n-k+2)pq^{n-k+1}$
   et donc $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} = \dfrac{(n-k+2)pq^{n-k+1}}{(n-k+1)pq^{n-k}} = \dfrac{n-k+2}{n-k+1}q$ i.e.

$$\boxed{\forall\ k \in [\![2, n]\!],\ \frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{n-k+2}{n-k+1}q.}$$

6. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, alors :

$$a_{k-1} < a_k \iff \frac{a_{k-1}}{a_k} < 1\ (a_k \neq 0) \iff \frac{n-k+2}{n-k+1}q < 1 \iff (n-k+2)q < n-k+1$$
$$\iff (n-k+1)(q-1) + q < 0 \iff -(n-k+1)p + q < 0 \iff \frac{q}{p} < n-k+1$$

   Donc

$$\boxed{\forall\ k \in [\![2, n]\!],\ a_{k-1} < a_k \iff k < n+1-\frac{q}{p}.}$$

7. D'après la question précédente,
   Tant que $k < n+1-\dfrac{q}{p}$, $a_{k-1} < a_k$ et la suite (a_k) est croissante.
   Puis dès que $k > n+1-\dfrac{q}{p}$, $a_{k-1} > a_k$ et la suite (a_k) est décroissante.

Donc (a_k) est maximal en k^* tel que $k^* < n+1-\dfrac{q}{p}$ et $k^*+1 > n+1-\dfrac{q}{p}$.
Ainsi

$$\boxed{a_k \text{ est maximum en } k^* = \left\lfloor n+1-\frac{q}{p}\right\rfloor \text{ et alors } n-k^*+1 \approx \frac{q}{p}}$$

Ainsi

$$\boxed{a_{k^*} \approx (n-k^*+1)pq^{n-k^*} = \frac{q}{p}pq^{q/p-1} = q^{q/p}}$$

8. (a) Dans cette situation, $p = \dfrac{1}{6}$, donc $\dfrac{q}{p} = \dfrac{5/6}{1/6} = 5$ alors :

$$\boxed{k^* = n+1-\frac{q}{p} = 15+1-5 = 11}$$

La probabilité de gagner est alors $a_{k^*} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,4019$.
Le joueur doit donc attendre le $11^{\text{ème}}$ lancer, puis à partir du premier 6 qui suit ce lancer, annoncer que c'est le dernier de la série.

(b) Pour les trois simulations, on marque le $11^{\text{ème}}$ lancer et l'on compte le nombre de 6 qui suit, la stratégie sera gagnante pour un tirage admettant un unique 6 à partir de ce lancer.
— 1 6 6 4 4 4 6 2 3 3 **2** 3 6 5 3 : gagnant
— 4 6 6 5 4 4 2 6 1 4 **4** 3 5 1 5 : perdant
— 4 4 3 6 4 3 3 4 4 6 **2** 6 1 2 6 : perdant

(c) Le programme informatique est le suivant :
```
import random as rd
def programDM12 ():    compt=0    for k in range(15) :
        de=rd.randint(1,6)
        if k>9 and de==6 :
            compt=compt+1
    if compt==1 :
        print('gagnant')
    else :
        print('perdant')
```
`compt` est une variable qui compte le nombre de 6 obtenu après le $11^{\text{ème}}$ lancer ; la stratégie est gagnante ssi ce compteur vaut 1.

B. Suites d'épreuves à ordonner.

1. Lorsque l'on suit la stratégie indiquée, les résultats des expériences 1 à $k-1$ sont sans influence et trois cas de figure peuvent se produire :
— Il n'y a aucun succès dans les épreuves k à n, dans ce cas la stratégie n'aura pas été gagnante.
— Il n'y a un seul succès dans les épreuves k à n, dans ce cas la stratégie a été gagnante.
— Il y a plus d'un succès dans les épreuves k à n, dans ce cas la stratégie n'aura pas été gagnante puisque le joueur aura pronostiqué le premier de ces succès, alors qu'il fallait trouver le dernier succès, celui-ci se réalisant à un moment différent de celui-là.
Ainsi

$$\boxed{G_k \text{ se réalise si et seulement si il y a un et un seul succès entre } k \text{ et } n}$$

2. $Y_k = 0 \Leftrightarrow X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 0 \Leftrightarrow (X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)$.
Donc $\mathbf{P}(Y_k = 0) = \mathbf{P}\Big((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0)\Big)$
$= \mathbf{P}(X_k = 0) \times \mathbf{P}(X_{k+1} = 0) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = 0)$, car les événements sont indépendants.
Donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_k = 0) = q_k \times q_{k+1} \times \cdots \times q_n = Q_k}$$

$Y_k = 1 \Leftrightarrow X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 1$
$\Leftrightarrow \exists\, i \in [\![k,n]\!]$ tel que $(X_i = 1)$ et $\forall\, j \in [\![k,n]\!], j \neq i\ X_j = 0$.
$\Leftrightarrow \displaystyle\bigcup_{i=k}^{n} \Big((X_i = 1) \bigcap_{j=k, j\neq i}^{n} (X_j = 0)\Big)$.

Donc $\mathbf{P}(Y_k = 1) = \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{n} \Big((X_i = 1) \bigcap_{j=k, j\neq i}^{n} (X_j = 0)\Big)\right)$

$$= \sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}\left(\left((X_i = 1) \bigcap_{j=k, j\neq i}^{n} (X_j = 0)\right)\right), \text{ car les événements sont disjoints.}$$
$$= \sum_{i=k}^{n} \mathbf{P}(X_i = 1) \prod_{j=k, j\neq i}^{n} \mathbf{P}(X_j = 0), \text{ car les événements sont indépendants.}$$
$$= \sum_{i=k}^{n} p_i \prod_{j=k, j\neq i}^{n} q_j = \sum_{i=k}^{n} p_i \frac{Q_k}{q_i} = Q_k \sum_{i=k}^{n} \frac{p_i}{q_i}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_k = 1) = Q_k \times R_k}$$

3. $G_{k-1} \Leftrightarrow Y_{k-1} = 1 \Leftrightarrow X_{k-1} + X_k + \dots X_n = 1$
$\Leftrightarrow \Big((X_{k-1} = 1) \cap (X_k + \dots X_n = 0)\Big) \bigcup \Big(X_{k-1} = 0) \cap (X_k + \dots X_n = 1)\Big).$
Donc $\underline{G_{k-1} = \Big((Y_k = 1) \cap (X_{k-1} = 0)\Big) \cup \Big((Y_k = 0) \cap (X_{k-1} = 1)\Big)}$

4. Nous savons que $\underline{\mathbf{P}(G_k) = \mathbf{P}(Y_k = 1) = R_k Q_k}$.
D'après 3., $\mathbf{P}(G_{k-1}) = \mathbf{P}\Big((Y_k = 1) \cap (X_{k-1} = 0)\Big) + \mathbf{P}\Big((Y_k = 0) \cap (X_k = 1)\Big)$ (incompatibilités)
donc $\mathbf{P}(G_{k-1}) = \mathbf{P}(Y_k = 1)\mathbf{P}(X_{k-1} = 0) + \mathbf{P}(Y_k = 0)\mathbf{P}(X_k = 1)$, événements indépendants
et donc
$$\boxed{\mathbf{P}(G_{k-1}) = p_{k-1}Q_k + (1 - p_{k-1})R_k Q_k}$$

5. Alors $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} = \dfrac{p_{k-1}Q_k + (1 - p_{k-1})R_k Q_k}{R_k Q_k} = (1 - p_{k-1}) + \dfrac{p_{k-1}}{R_k}$.
Donc $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} < 1 \Leftrightarrow 1 - p_{k-1} + \dfrac{p_{k-1}}{R_k} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{p_{k-1}}{R_k} < p_{k-1} \Leftrightarrow 1 < R_k$ Ainsi :
$$\boxed{\frac{a_{k-1}}{a_k} < 1 \Longleftrightarrow 1 < R_k}$$
Le meilleur k est donc
$$\boxed{k^* \text{ tel que } R_{k*} \geqslant 1 \text{ et } R_{k*-1} < 1}$$
c'est à dire le premier k pour lequel R_k est supérieur à 1.

6. (a) On applique la loi uniforme et on va raisonner par dénombrement (remarquons qu'il s'agit de compter les records. . .) :
On peut raisonner en considérant les i premiers nombres ensemble. Un cas favorable pour l'offre de i correspond
— choix d'une combinaison de i nombres parmi les n : $\dbinom{n}{i}$.
— PUIS on place le plus grand de ces nombres en i^{eme} place : 1 possibilité.
— PUIS on permute les $i - 1$ premiers nombres : $(i - 1)!$ possiblilités
— PUIS on permute les $n - i$ derniers nombres : $(n - i)!$ possiblilités
$p_i = \mathbf{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{i}(i - 1)!(n - i)! = \dfrac{n!(i - 1)!(n - i)!}{n!i!(n - i)!} = \dfrac{1}{i}$.
Dans tous les cas, on a
$$\boxed{p_i = \mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{i}}$$
En réalité, il s'agit toujours du même raisonnement, mais toujours affiné !
Donc $r_i = \dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{1/i}{i - 1/i}$ et comme $q_i = 1 - p_i = \dfrac{i - 1}{i}$,
$$\boxed{r_i = \frac{1}{i - 1}}$$

(b) Le calcul donne $R_5 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{638}{840} < 1$ et $R_4 = \dfrac{2754}{2520} > 1$,
$$\boxed{\text{il faut choisir } k = 4.}$$

(c) Donc la stratégie est la suivante :
$$\boxed{\text{A partir de la quatrième personne, tout offre supérieure aux précédentes est à saisir !}}$$

Exercice 2- Le jeu du Craps

1. Étude du jet de deux dés.
   (a) On s'intéresse à la somme de deux dés. Donc

$$\boxed{\Omega = [\![2, 12]\!]}$$

   On suppose que chacun des dés suit une probabilité uniforme.

   (b) Notons $S = x$, l'événement « la somme des dés a donné x ».
   Notons (a, b), l'événement « le premier dé a donné a et le second dé a donné b ».
   Chacun des événements de cette forme est un événement élémentaire de $[\![1; 6]\!] \times [\![1; 6]\!]$.
   Chacun a une probabilité $p = \frac{1}{36}$ de se réaliser.
   Enfin ces événements forment un systéme complet d'événements.
   Alors $\mathbf{P}(S = 2) = \mathbf{P}(1, 1) = p = \mathbf{P}(6, 6) = \mathbf{P}(S = 12)$
   $\mathbf{P}(S = 3) = \mathbf{P}(1, 2) + \mathbf{P}(2, 1) = 2p = \mathbf{P}(6, 5) + \mathbf{P}(5, 6) = \mathbf{P}(S = 11)$
   $\mathbf{P}(S = 4) = \mathbf{P}(1, 3) + \mathbf{P}(2, 2) + \mathbf{P}(3, 1) = 3p = \mathbf{P}(6, 4) + \mathbf{P}(5, 5) + \mathbf{P}(4, 6) = \mathbf{P}(S = 10)$
   $\mathbf{P}(S = 5) = \mathbf{P}(1, 4) + \mathbf{P}(2, 3) + \mathbf{P}(3, 2) + \mathbf{P}(4, 1) = 4p = \mathbf{P}(6, 3) + \mathbf{P}(5, 4) + \mathbf{P}(4, 5) + \mathbf{P}(3, 6) = \mathbf{P}(S = 9)$
   $\mathbf{P}(S = 6) = \mathbf{P}(1, 5) + \mathbf{P}(2, 4) + \mathbf{P}(3, 3) + \mathbf{P}(4, 2) + \mathbf{P}(5, 1) = 5p = \mathbf{P}(6, 2) + \mathbf{P}(5, 3) + \mathbf{P}(4, 4) + \mathbf{P}(3, 5) + \mathbf{P}(2, 6) = \mathbf{P}(S = 8)$
   $\mathbf{P}(S = 7) = \mathbf{P}(1, 6) + \mathbf{P}(2, 5) + \mathbf{P}(3, 4) + \mathbf{P}(4, 3) + \mathbf{P}(5, 2) + \mathbf{P}(6, 1) = 6p$ On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

$S=?$	$S=2$	$S=3$	$S=4$	$S=5$	$S=6$	$S=7$	$S=8$	$S=9$	$S=10$	$S=11$	$S=12$
$\mathbf{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

2. On note G_1, l'événement : « gagner sa mise dés le premier lancer (avec un 7 ou un 11) ».
   On note P_1, l'événement : « perdre sa mise dés le premier lancer (i.e. faire Craps) ».
   On note, pour tout $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, B_k, l'événement : « faire le point avec le score k ».
   (a) $G_1 = (S = 7) \cup (S = 11)$, donc $\mathbf{P}(G_1) = \mathbf{P}(S = 7) + \mathbf{P}(S = 11) - \mathbf{P}[(S = 7) \cap (S = 11)]$.
   Or ces événements sont incompatibles, donc

$$\boxed{\mathbf{P}(G_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}}$$

   $P_1 = (S = 2) \cup (S = 3) \cup (S = 12)$,
   donc $\mathbf{P}(P_1) = \mathbf{P}(S = 2) + \mathbf{P}(S = 3) + \mathbf{P}(S = 12)$, (événements incompatibles),
   donc

$$\boxed{\mathbf{P}(P_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}}$$

   (b) D'après les résultats de la première partie, on a ,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{4, 5, 6\},\ p_k = \mathbf{P}(B_k) = \frac{k-1}{36} \text{ et pour tout } k \in \{8, 9, 10\},\ p_k = p_{14-k}}$$

3. On va maintenant s'intéresser à la suite des jets nécessaires pour terminer le jeu.
   On note donc C, l'événement « il y a plusieurs jets dans une partie de Craps ».
   (a) C est le contraire de $G_1 \cup P_1$, donc $\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(G_1 \cup P_1)$.
   Or G_1 et P_1 sont incompatibles donc

$$\boxed{\mathbf{P}(C) = 1 - \big(\mathbf{P}(G_1) + \mathbf{P}(P_1)\big) = 1 - \frac{2+1}{9} = \frac{2}{3}}$$

   (b) On note n, le nombre de jets nécessaires (en comptant le premier) et k le point obtenu par le joueur au premier jet.
   Alors n peut prendre toutes les valeurs entières possibles à partir de 2, donc

$$\boxed{n \in [\![2, +\infty[\![}$$

   B_k^n, : « le joueur gagne la mise, avec un point k et en lançant n fois les deux dés ».
   L'événement B_k^n est exactement formé des événements élémentaires suivants, indépendants :
   — Au premier lancer, on a l'événement $S = k$ de probabilité p_k

— Aux lancers 2 à $n-1$, on a obtenu $S=h$, avec $h \neq k$ et $n \neq 7$ (sinon le jeu terminerait).

Pour chaque lancer la probabilité est : $1 - p_k - p_7 = \frac{5}{6} - p_k$

— Au lancer n, on a à nouveau l'événement $S = k$ de probabilité p_k

Les événements étant indépendants, $\mathbf{P}(B_k^n)$ est le produit des probabilités élémentaires ci-dessus.

Donc

$$\boxed{\forall\ n \geqslant 2,\ \forall\ k \in \{4,5,6,8,9,10\},\ \mathbf{P}(B_k^n) = p_k \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^{(n-1)-2+1} p_k = p_k^2 \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^{n-2}}$$

(c) Pour tout $k \in \{4,5,6,8,9,10\}$ $G_k = \bigcup_{n=2}^{\infty} B_k^n$,

$$\boxed{G_k \text{ est l'événement : « le joueur gagne au craps en faisant le point } k \text{ »}}$$

(avec autant de jets que nécessaire)

$\forall\ k \in \{4,5,6,8,9,10\}$, $\forall\ n, m \geqslant 2$, B_k^n et B_k^m sont incompatibles,

donc d'aprés la propriété de σ-additivité de $\mathbf{P}$:

$\mathbf{P}(G_k) = \mathbf{P}(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_k^n) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}(B_k^n)$ et donc

$$\boxed{\mathbf{P}(G_k) = p_k^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^{n-2} = p_k^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^{m}}$$

(d) Soit $k \in \{4,5,6\}$, alors $p_k = \frac{k-1}{36}$ et donc $\frac{5}{6} - p_k = \frac{30-k+1}{36}$.

Donc la série géométrique précédente converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{31-k}{36}} = \frac{36}{5+k}$

Et finalement

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{4,5,6\},\ \mathbf{P}(G_k) = \frac{(k-1)^2}{36^2} \times \frac{36}{5+k} = \frac{(k-1)^2}{36(5+k)}}$$

(e) Comme $\forall\ k \in \{4,5,6\}$ $p_{14-k} = p_k$:

$$\boxed{\mathbf{P}(G_4) = \mathbf{P}(G_{10}),\ \mathbf{P}(G_5) = \mathbf{P}(G_9) \text{ et } \mathbf{P}(G_6) = \mathbf{P}(G_8)}$$

(f) On a alors le tableau (non simplifié) suivant des parties gagnées

événements	G_4	G_5	G_6	G_8	G_9	G_{10}
probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36 \times 5}$	$\frac{25}{36 \times 11}$	$\frac{25}{36 \times 11}$	$\frac{8}{36 \times 5}$	$\frac{1}{36}$

4. La probabilité de gagner est $\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G_1) + \mathbf{P}(G_4) + \mathbf{P}(G_5) + \mathbf{P}(G_6) + \mathbf{P}(G_8) + \mathbf{P}(G_9) + \mathbf{P}(G_{10})$.
Le calcul donne

$$\boxed{\mathbf{P}(G) = \frac{440 + 2 \times (55 + 88 + 125)}{36 \times 55} = \frac{976}{1980} = \frac{244}{495} \approx 0,492929\ldots}$$

5. La probabilité est proche de 0,5, ce qui rend le jeu tentant pour tout joueur et explique le succés du jeu. Mais elle reste inférieure à 0,5, ce qui explique que les casinos continuent à le développer (loi de grands nombres : c'est toujours les casinos qui gagnent)