Leçon 28 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Inverse dérivation. Propriétés géométique

⇒Propriétés « analytique » : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

⇒Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒Propriétés « analytique »de l'intégrale

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

$\Rightarrow$ Inverse dérivation. Propriétés géométique

$\Rightarrow$Propriétés « analytique » : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

Problème Primitivisation des opérations alégébriques.
Intégrale d'une somme ? Facile !
Et pour un produit ? Et une composition ?

Problèmes

Problème Lien primitive/intégrale.
Quel lien entre l'optimisation et le calcul global ?

Problème Problèmes historiques.
L'horloge de Claude Perrault

Problème Primitivisation des opérations alégébriques.
Intégrale d'une somme ? Facile !
Et pour un produit ? Et une composition ?

Problème Fraction rationnelle.
Une méthode pour trouver une primitive à toute fraction rationnelle imaginable !

Problèmes

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problèmes

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.

Le fameux oscillateur harmonique

Problèmes

Problème Implication.

Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.

Le fameux oscillateur harmonique

Problème Existence. Unicité

Problème de Cauchy

Problèmes

Problème Implication.
Lien : être continue et admettre une primitive ?

Problème Problème de M. Lagoute.
Le fameux oscillateur harmonique

Problème Existence. Unicité
Problème de Cauchy

Problème Linéarisation.
Que faire si l'équation n'est pas linéaire ?

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On commence par se concentrer sur les primitives, bien qu'il ne s'agit que d'un cas particulier d'une équation différentielle.

Primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On commence par se concentrer sur les primitives, bien qu'il ne s'agit que d'un cas particulier d'une équation différentielle.

Définition - Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) telle que, sur I, $F' = f$.

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$

si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

$\frac{1}{2}$**Démonstration**

Propriétés

Propriété - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$

$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$

si et seulement si $\mathbf{Re}F$ et $\mathbf{Im}F$ sont des primitives de $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ (resp.).

Propriété - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

$\frac{1}{2}$**Démonstration**

Analyse Interprétation en terme de relation d'équivalence/classe d'équivalence

⇒**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

⇒**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Tableau (1)

En reprenant simplement le tableau de dérivations des fonctions usuelles, on trouve :

Tableau (1)

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (1)

fonction	primitives	fonction	primitives
x^α où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
e^x	$e^x + C$	$e^{\beta x}$ où $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\dfrac{e^{\beta x}}{\beta} + C$
$\operatorname{sh}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\operatorname{ch}\beta x}{\beta} + C$	$\operatorname{ch}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\operatorname{sh}\beta x}{\beta} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin\beta x$ où $\beta \neq 0$	$-\dfrac{\cos\beta x}{\beta} + C$	$\cos\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\sin\beta x}{\beta} + C$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\ln x$	$x\ln x - x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

(C est une constante réelle)

Tableau (2)

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (2)

fonction f **de la forme :**	**primitive** F
$u'(x)u(x)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Remarques

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Attention. Primitive sur deux intervalles

Si f admet des primitives sur la réunion de deux intervalles disjoints, on peut avoir des constantes différentes sur chacun des deux intervalles.
On rencontrera particulièrement cette situation dans le chapitre sur les équations différentielles.

$\Rightarrow$**Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale**

$\Rightarrow$**Propriétés « analytique »de l'intégrale**

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha,\beta \in \mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x) = \sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \ldots$

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x)=\sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n\dots$

Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :
$f_1(x)=e^{3x}\sin(2x);\quad f_2(x)=\sin^3(x)\cos^4(x)$

Exponentielles et trigonométrie

Savoir-faire. $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir-faire. $\sin^n x\cos^m x$

Pour $f(x) = \sin^n x\cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre :
$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \dots$

<u>Exercice</u>
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :
$f_1(x) = e^{3x}\sin(2x)$; $\quad f_2(x) = \sin^3(x)\cos^4(x)$
Remarque Si on a un doute…

Fractions rationnelles (table)

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	**primitives**
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

(C est une constante réelle)

Fractions rationnelles (table)

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	primitives
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

(C est une constante réelle)

Exercice

A démontrer

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes α et β. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{\lambda}{x-\alpha} + \dfrac{\mu}{x-\beta}$ et on primitive :
$F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a\neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$
- si $\Delta = 0$, on a alors $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)^2}$.
  On primitive directement avec la fraction rationnelle :
  $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$
- si $\Delta = 0$, $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$
- si $\Delta < 0$, on met sous forme canonique $f(x) = \dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$. On reconnaît une fonction composée qui se primitive avec $\arctan$: $F(x) = \dfrac{1}{\beta}\arctan\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Fractions rationnelles (savoir-faire)

Remarque Division euclidienne

Savoir-faire. Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

- si $\Delta > 0$,
  $F(x) = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda (x-\beta)^\mu|$
- si $\Delta = 0$, $F(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)}$
- si $\Delta < 0$, $F(x) = \dfrac{1}{\beta} \arctan\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Exercice

Déterminer des primitives des fonctions : $f_1(x) = \frac{1}{(x^2-x-2)}$; $f_2(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; $f_3(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}$; $f_4(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+4}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

$\Rightarrow$ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \rightarrow f' \Longleftrightarrow f \leftarrow F$: primitivisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \Longleftrightarrow f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \iff f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)
- Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

- $f \to f' \iff f \leftarrow F$: primitivisation
- Tableau de correspondance (**A APPRENDRE**)
- Et une première série de savoir-faire (exponentielle et trigonométrie)
- $\displaystyle\int_a^b (f)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
- Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.
- Le calcul intégral est bien l'inverse de celui de la dérivation.
- Question remise à plus tard : quelles sont les fonctions qui admettent une primitive, finalement.
  C'est un ensemble qui contient strictement l'ensemble des fonctions continues.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définir la démarche inverse de la dérivation. Propriétés « géométriques »de l'intégrale

⇒ Propriétés « analytique »de l'intégrale

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 6
  3.2. Quelques propriétés
  3.3 et 3.4. Techniques
- Exercice n° 193 & 194
- TD de jeudi :
  8h-10h : n°195 pair, 196, 199, 203 impair, 205
  10h-12h : n°195 impair, 197, 200, 201, 203 pair, 204