



Leçon 31 - Fonctions primitives et équations différentielles

Leçon 31 - Fonctions primitives et équations différentielles

⇒ Vocabulaire équ. diff.

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

⇒ Définir le vocabulaire associé aux équations différentielles

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles
linéaire d'ordre 1

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à
coefficients constants

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Remarque !!

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants**
(l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Remarque !!

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants** (l'année prochaine, vous élargirez ce point de vue)

Définition - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t) \text{ si}$$

1. f est deux fois dérivable sur I
2. $\forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = u(t)$

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$$(H) \quad \alpha y'' + b y' + c y = 0 \quad \alpha \neq 0.$$

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$$(H) \quad \alpha y'' + b y' + c y = 0 \quad \alpha \neq 0.$$

Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$$(H) \quad \alpha y'' + b y' + c y = 0 \quad \alpha \neq 0.$$

Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$$(H) \quad \alpha y'' + b y' + c y = 0 \quad \alpha \neq 0.$$

Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.

Théorème - Cas complexe

- ▶ Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- ▶ Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Ensemble des solutions (structure)

On considère donc l'équation homogène

$$(H) \quad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \quad \alpha \neq 0.$$

Analyse Composition $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Cette analyse ne marche pas si $\alpha = \beta$.

Théorème - Cas complexe

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Démonstration

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

Pour le cas réel, la partie correspondant aux racines complexes ($\Delta < 0$) est plus subtile.

Théorème - Cas réel

On suppose ici a, b, c réels, $a \neq 0$.

- ▶ Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- ▶ Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- ▶ Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

⇒ Vocabulaire équ. diff.

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit (H) l'équation différentielle homogène $\alpha y'' + b y' + c y = 0$ où $(\alpha, b, c) \in \mathbb{R}^3, \alpha \neq 0$.

Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors **Re** f est solution de (H) à valeurs réelles.

Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H) .

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit (H) l'équation différentielle homogène $\alpha y'' + b y' + c y = 0$ où $(\alpha, b, c) \in \mathbb{R}^3, \alpha \neq 0$.

Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors **Re** f est solution de (H) à valeurs réelles.

Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H) .

Démonstrations

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Vocabulaire équa.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

Remarque Base d'une espace vectoriel

⇒ Vocabulaire équa.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Selon le signe de Δ . Sur $\mathbb{R}$

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

Remarque Autre expression pour le cas $\Delta < 0$

Remarque Base d'une espace vectoriel

Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles).

1. $y'' = \omega^2 y$
2. $y'' = -\omega^2 y$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète (E) $ay'' + by' + cy = u(t)$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :

Si $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \tilde{y}(t); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète (E) $ay'' + by' + cy = u(t)$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

Théorème - Structure de l'ensemble S_E

La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :

Si $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \tilde{y}(t); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ. diff.

$\Rightarrow$ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme

$$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$$

et si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \dots, u_n(t)$, alors une solution particulière de (E) est $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n$.

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

Proposition - Principe de superposition des solutions

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme

$$u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$$

et si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \dots, u_n(t)$, alors une solution particulière de (E) est $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n$.

Remarque Démonstration

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.

Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.

Le théorème qui suit peut être lu comme un savoir-faire.

Théorème - Second membre $e^{mt}P(t)$

Soit $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale de degré n . Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\tilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale

- ▶ de degré n si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- ▶ de degré $n + 1$ si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- ▶ de degré $n + 2$ si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$

⇒ Vocabulaire équ. diff.

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Polynôme $\times$ fonction trigonométrique

Analyse Polynôme trigonométrique

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Polynôme $\times$ fonction trigonométrique

Analyse Polynôme trigonométrique

Savoir-faire. Second membre de la forme

$$e^{\alpha t}(P(t)\cos \beta t + Q(t)\sin \beta t)$$

On peut trouver (par identification) une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad a y'' + b y' + c y = e^{\alpha t}(P(t)\cos t\beta t) + Q(t)\sin t\beta t)$$

de la forme $\tilde{y}(t) = e^{\alpha t}(T(t)\cos t\beta t) + R(t)\sin t\beta t)$ où T et R sont des fonctions polynomiales

- ▶ de degré $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- ▶ de degré $n + 1 = \max(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

$\Rightarrow$ Vocabulaire équ.
diff.

$\Rightarrow$ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

⇒ Vocabulaire équa.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

Exercice

1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + 1$.
2. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Alors il existe une unique solution $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Alors il existe une unique solution $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ .

⇒ Vocabulaire équ. diff.

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dérivation/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Avec conditions initiales (problème de Cauchy)

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Alors il existe une unique solution $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ .

Exercice

Résoudre le problème de Cauchy : $y'' - 2y' + y = te^t$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

⇒ Vocabulaire équ. diff.

⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et primitives

4. Equations différentielles (dériver/intégration tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

► Recollement

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- ▶ Recollement
- ▶ Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Objectifs

⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)

- ▶ Recollement
- ▶ Application aux inégalités différentielles : rectification de la torsion, et exploitant la positivité d'une dérivée.

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
 - Structure des solutions : espace affine

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
 - ▶ Structure des solutions : espace affine
 - ▶ Equation homogène

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
 - ▶ Structure des solutions : espace affine
 - ▶ Equation homogène
 - ▶ Résolution explicite : résolution d'un trinôme à coefficients constants (cas sur $\mathbb{C}$)

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

⇒ Vocabulaire équ.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Inégalité différentielle (d'ordre 1)
- ⇒ Méthode de résolution des équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Pour la prochaine fois

- Exercice n°212

⇒ Vocabulaire équa.
diff.

⇒ Méthode de
résolution des
équations
différentielles linéaire
d'ordre 1

1. Problèmes

2. Primitives

3. Intégrales et
primitives

4. Equations
différentielles
(dérivation/intégration
tordue)

4.1. Vocabulaire

4.2. Equation différentielle
linéaire d'ordre 1

4.3. EDL2 à coeff. constants