

Leçon 40 - Groupes

- Problèmes
- Lois de composition interne
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Det & Prop
- 3.2. Groupes produits

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

1. Problèmes

- 2. Lois de composition internes
  - 2.1. Définitions
  - 2.2. Propriétés directes
  - 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
  - 3.1. Définition et propriétés
  - 3.2. Groupes produits
  - 3.3. Exemples

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- composition interne
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
- 2. Groupes produits
- .3. Exemples

#### Problème Structure

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

2. Lois de

0.1 D45-11---

2.2. Propriéte

2.3. Induction

3. Structure de groupe

1 Def 8 Prop

2. Groupes produit

3.3. Exemples

Problème Structure

Problème Résolution des équations polynomiales

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- composition in
- 2.2. Propriét
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
- 2. Groupes produit

4□ ト 4個 ト 4 園 ト 4 園 ト ■ 9 9 0 0 □

Problème Structure

Problème Résolution des équations polynomiales

Problème Groupe de Poincaré

# $\Rightarrow \text{Reconnaitre les} \\ \text{groupes}$

#### 1. Problèmes

2. Lois de

oompooitio

2.2. Propriét

z.z. r ropire

. Structure de

3.1. Def & Prop

2. Groupes produ

3.3. Exemples

Problème Structure

Problème Résolution des équations polynomiales

Problème Groupe de Poincaré

Problème Mariage chez les Murgin

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

2. Lois de

aomposition

2.2 Propriét

. . . . . .

. Structure de

3.1. Def & Prop

2. Groupes produit

3.3. Exemples

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

### 2. Lois de composition internes

#### 2.1. Définitions

- 2.2. Propriétés directes
- 2.3. Induction

### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés
- z.s. maucton
- 3. Structure de groupe
  - .1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# Loi interne (opération)

### Définition - Loi de composition interne

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de  $E \times E$  dans  $E : \Phi : E \times E \to E, (x,y) \mapsto x \star y$ . On note, pour  $(x,y,z) \in E^3$ ,

$$(x \star y) \star z = \Phi(\Phi(x, y), z)$$
 et  $x \star (y \star z) = \Phi(x, \Phi(y, z))$ .

Un tel couple  $(E,\star)$  est appelé un magma.

Quand la loi interne est clairement identifiée, par abus, on peut dire que E est un magma sans précision supplémentaire.

- Problèmes
- Z. LOIS GE
- 2.1 Définitions
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 8.1. Def & Pr
- 3.2. Groupes produits 3.3. Exemples

# Loi interne (opération)

### Définition - Loi de composition interne

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de  $E \times E$  dans  $E : \Phi : E \times E \to E, (x,y) \mapsto x \star y$ . On note, pour  $(x,y,z) \in E^3$ ,

$$(x \star y) \star z = \Phi(\Phi(x, y), z)$$
 et  $x \star (y \star z) = \Phi(x, \Phi(y, z))$ .

Un tel couple  $(E,\star)$  est appelé un magma.

Quand la loi interne est clairement identifiée, par abus, on peut dire que E est un magma sans précision supplémentaire.

Exemple - N.

- Problèmes
- Z. LOIS GE
- 2.1 Dáfinitions
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 1. Def & Pro
- 3.2. Groupes produits
   3.3. Exemples

### Définition - Caractéristiques

On dit que le magma  $(E, \star)$ :  $\star$ :

- est commutatif si  $\forall (x, y) \in E \times E, x \star y = y \star x$
- est associatif si  $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
- est unifère ou possède un élément *neutre* s'il existe  $e \in E$  tel que  $\forall x \in E$ ,  $e \star x = x \star e = x$  (e est alors l'élément neutre.)

Pour x élément de E, on dit qu'un élément y de E est un symétrique ou un inverse de x pour  $\star$  si  $x \star y = y \star x = e$ , où e est élément neutre.

- Problèmes
- composition internes
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriét
- 2.5. Induction
  - 3. Structure de proupe
  - 1. Def & Prop
  - Groupes produits
     Exemples

### Vocabulaire

### Définition - Caractéristiques

On dit que le magma  $(E, \star)$ :  $\star$ :

- est commutatif si  $\forall (x, y) \in E \times E, x \star y = y \star x$
- est associatif si  $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
- est unifère ou possède un élément *neutre* s'il existe  $e \in E$  tel que  $\forall x \in E$ ,  $e \star x = x \star e = x$  (e est alors l'élément neutre.)

Pour x élément de E, on dit qu'un élément y de E est un symétrique ou un inverse de x pour  $\star$  si  $x \star y = y \star x = e$ , où e est élément neutre.

#### Definition - Monoïde

Un magma  $(M, \star)$  associatif et unifère est appelé un monoïde.

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
  - Structure de roupe
  - .1. Def & Prop
  - 3.2. Groupes produits
    3.3. Exemples

**Remarque** Notations Plusieurs remarques

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- .2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.3 Exemples

### **Remarque** Notations

Plusieurs remarques

1. Les lois de composition interne sont usuellement notées  $\star$ ,  $\bot$ ,  $\top$ , +,  $\times$ , en notation multiplicative  $x \star y = xy$ .

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- 2. LOIS GE
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés
- 3. Structure de
  - .1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits

### **Remarque** Notations

Plusieurs remarques

- 1. Les lois de composition interne sont usuellement notées  $\star$ ,  $\bot$ ,  $\top$ , +,  $\times$ , en notation multiplicative  $x \star y = xy$ .
- 2. La notation additive est usuellement réservée à une loi commutative et associative, dans ce cas le symétrique de x (s'il existe) est noté -x.

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- .2. Propriétés
- .3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 1. Def & Prop
- .2. Groupes produi

### **Remarque** Notations

#### Plusieurs remarques

- 1. Les lois de composition interne sont usuellement notées  $\star$ ,  $\bot$ ,  $\top$ , +,  $\times$ , en notation multiplicative  $x \star y = xy$ .
- La notation additive est usuellement réservée à une loi commutative et associative, dans ce cas le symétrique de x (s'il existe) est noté -x.
- 3. Lorsque la loi est commutative et associative, on peut écrire :  $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n \text{ (notation additive)}$  ou  $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \dots x_n \text{ (notation multiplicative)}.$

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- .2. Propriétés
- Structure de
- groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.3. Exemples

### **Remarque** Notations

#### Plusieurs remarques

- 1. Les lois de composition interne sont usuellement notées  $\star$ ,  $\bot$ ,  $\top$ , +,  $\times$ , en notation multiplicative  $x \star y = xy$ .
- 2. La notation additive est usuellement réservée à une loi commutative et associative, dans ce cas le symétrique de x (s'il existe) est noté -x.
- 3. Lorsque la loi est commutative et associative, on peut écrire :  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n \text{ (notation additive)}$  ou  $\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \dots x_n \text{ (notation multiplicative)}.$
- 4. Si la loi  $\star$  est associative, on peut écrire  $x^{\star n} = x \star \cdots \star x$  (n termes x), en notation multiplicative on obtient ainsi  $x^n$  et en notation additive nx.

- I. Problemes
- 2. Lois de
- 2.1 Définitions
- 2.2. Propriétés
- .3. Induction
- Structure de roupe
- .1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produit

#### Distributivité

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 2.1 Définitions

#### Définition - Distributivité

Supposons que l'ensemble E est muni de deux lois internes  $\star$  et Т.

On dit que ★ est distributive par rapport à la loi interne T si :  $\forall (x, y, z) \in K^3$ 

- $x \star (y \top z) = (x \star y) \top (x \star z)$  (distributive à gauche)
- $(x \top y) \star z = (x \star z) \top (y \star z)$  (distributive à droite)

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

#### 2. Lois de composition internes

- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés directes
- 2.3 Induction

### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- 2. Lois de composition internes
- 2.2 Propriétés
- ..............................
- 3. Structure de
- roupe
- 2.2 Grouppe produit
- 3.2. Groupes produit

# Premières propriétés

# Proposition - Unicités (éléments neutres, symétrique)...si existence

Soit (F, T) un magma.

Si F est unifère, l'élément neutre pour  $\top$  est unique.

Soit  $(E, \star)$  un monoïde.

Si  $x \in E$  admet un symétrique alors celui-ci est unique;

Si  $x, y \in E$  admettent des symétriques  $x^{-1}$  et  $y^{-1}$  alors  $x \star y$  admet un symétrique :  $y^{-1} \star x^{-1}$ .

Si x est symétrique alors x est régulier (à gauche et à droite) :

```
\forall y, z \in E, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z \text{ et } y \star x = z \star x \Rightarrow y = z.
```

# ⇒ Reconnaitre les groupes

1. Problèmes

2. Lois de

2.1. Définitions

2.2. Propriétés

Structure de

roupe

3.2. Groupes produit

3.3. Exemples

# Premières propriétés

# Proposition - Unicités (éléments neutres, symétrique)...si existence

Soit  $(F, \top)$  un magma.

Si F est unifère, l'élément neutre pour  $\top$  est unique.

Soit  $(E, \star)$  un monoïde.

Si  $x \in E$  admet un symétrique alors celui-ci est unique;

Si  $x, y \in E$  admettent des symétriques  $x^{-1}$  et  $y^{-1}$  alors  $x \star y$  admet un symétrique :  $y^{-1} \star x^{-1}$ .

Si x est symétrique alors x est régulier (à gauche et à droite) :

 $\forall y,z \in E, x \star y = x \star z \Rightarrow y = z \text{ et } y \star x = z \star x \Rightarrow y = z.$ 

#### Démonstration

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

1. Problemes

2. Lois de

- - - - - -

2.2. Propriétés

3. Induction

Structure de

.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > 9 Q Q

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

#### 2. Lois de composition internes

- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés directes
- 2.3. Induction

### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- 2. Lois de
  - .1. Définitions
  - 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de aroupe
- 3.1. Def & Prop
- 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### Loi induite

### Définition - Loi induite

Soit  $A \subset E$ , avec  $(E, \top)$  magma.

 $\underline{A}$  est stable par  $\top$  (loi de composition interne sur E) si  $\forall x, y \in A, x \top y \in A$ .

 $\top_A = \top_{|A \times A}$  s'appelle la loi induite (par  $\top$  sur A).

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 0.1 D45-W---
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1 Def & Prop
- 3.2. Groupes produits

#### Loi induite

#### Définition - Loi induite

Soit  $A \subset E$ , avec  $(E, \top)$  magma.

 $\underline{A}$  est stable par  $\top$  (loi de composition interne sur E) si  $\forall x, y \in A, x \top y \in A$ .

 $\top_A = \top_{|A \times A}$  s'appelle la loi induite (par  $\top$  sur A).

Remarque Transmission des propriétés

# $\Rightarrow \text{Reconnaitre les} \\ \text{groupes}$

- Problèmes
- 2. Lois de
- 0.1 D45-W---
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits

### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

#### 2. Lois de composition internes

- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés directes
- 2.3. Induction

### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- Problèmes
- Lois de
   composition interne
  - 2.1. Definitions
- z.z. Proprietes
- 3 Structure de
- groupe

#### 3.1. Def & Prop

- 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles :

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriet
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits

Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles :

#### Définition - Groupe

On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi  $\top$  vérifiant :

- ▶ ⊤ est une loi de composition interne
- ▶ la loi ⊤ est associative;
- ightharpoonup G possède un élément neutre pour  $\top$ ;
- b tout élément x de G possède un symétrique pour  $\top$  (ou tout élément de G est inversible, est symétrisable).

Si de plus la loi  $\top$  est commutative, on dit que le groupe est abélien (ou commutatif).

- l. Problèmes
- 2. Lois de
  - Jiiipositioii iii
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles :

### Définition - Groupe

On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi  $\top$  vérifiant :

- ▶ T est une loi de composition interne
- ▶ la loi ⊤ est associative;
- ▶ G possède un élément neutre pour  $\top$ ;
- b tout élément x de G possède un symétrique pour  $\top$  (ou tout élément de G est inversible, est symétrisable).

Si de plus la loi  $\top$  est commutative, on dit que le groupe est abélien (ou commutatif).

Exemple Groupes des racines de l'unité

- Problèmes
- 2. Lois de
  - omposition inte
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- Structure de oupe
- 3.1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont inversibles :

#### Définition - Groupe

On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi  $\top$  vérifiant :

- ▶ T est une loi de composition interne
- ▶ la loi ⊤ est associative;
- ightharpoonup G possède un élément neutre pour  $\top$ ;
- b tout élément x de G possède un symétrique pour  $\top$  (ou tout élément de G est inversible, est symétrisable).

Si de plus la loi  $\top$  est commutative, on dit que le groupe est abélien (ou commutatif).

**Exemple** Groupes des racines de l'unité **Remarque** Sous-groupe

# ⇒ Reconnaitre les groupes

Problèmes

2. Lois de

composition

2.2. Propriétés

2.3. Induction

Structure de oupe

3.1. Def & Prop

2. Groupes produits

3.3. Exemples

# Régularité

# Proposition - Régularité

Dans un groupe tous les éléments sont réguliers à gauche et à droite

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1 Définitions
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits

# Régularité

# Proposition - Régularité

Dans un groupe tous les éléments sont réguliers à gauche et à droite

#### **Démonstration**

# $\Rightarrow \text{Reconnaitre les} \\ \text{groupes}$

- Problèmes
- 2. Lois de
- composition internes
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- groupe 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# Propriétés immédiates

Comme les groupes sont des magmas infères, où tous les éléments sont inversibles. Nécessairement :

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1 Dáfinitions
- 2.2. Propriét
- . ....
- groupe
- 3.1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits

# Propriétés immédiates

Comme les groupes sont des magmas infères, où tous les éléments sont inversibles. Nécessairement :

#### Théorème - Existence et unicité

Soit  $(G, \top)$  un groupe. Alors :

- L'élément neutre est unique.
- ► Tout élément possède un unique symétrique.
- En notant  $x^{-1}$  le symétrique (l'inverse) de x, on a  $(x^{-1})^{-1} = x$ .
- $(x \top y)^{-1} = y^{-1} \top x^{-1}$ .

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- composition internes
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- Structure de roupe

#### 3.1. Def & Prop

. Groupes produits

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

#### 2. Lois de composition internes

- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés directes
- 2.3. Induction

### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

# $\Rightarrow$ Reconnaitre les groupes

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
  - 2.1. Définitions
- 2.2. Proprietes
- 3. Structure de
- groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits

### Définition - Produit de groupes

Soient  $(G, \bot)$  et  $(H, \top)$  deux groupes.

On appelle groupe produit (de ces deux groupes), le groupe  $(G \times H, \star)$  tel que :

$$\forall \; (x_1,y_1)(x_2,y_2) \in G \times H \qquad (x_1,y_1) \star (x_2,y_2) = (x_1 \bot x_2,y_1 \top y_2)$$

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

3.2. Groupes produits

### Définition - Produit de groupes

Soient  $(G, \bot)$  et  $(H, \top)$  deux groupes.

On appelle groupe produit (de ces deux groupes), le groupe  $(G \times H, \star)$  tel que :

$$\forall (x_1, y_1)(x_2, y_2) \in G \times H \quad (x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1 \perp x_2, y_1 \top y_2)$$

Il s'agit bien d'un groupe

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

3.2. Groupes produits

# Définition - Produit de groupes

Soient  $(G, \bot)$  et  $(H, \top)$  deux groupes.

On appelle groupe produit (de ces deux groupes), le groupe  $(G \times H, \star)$  tel que :

$$\forall \ (x_1,y_1)(x_2,y_2) \in G \times H \qquad (x_1,y_1) \star (x_2,y_2) = (x_1 \bot x_2, y_1 \top y_2)$$

Il s'agit bien d'un groupe

#### Démonstration

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

3.2. Groupes produits

#### Définition - Produit de groupes

Soient  $(G, \bot)$  et  $(H, \top)$  deux groupes.

On appelle groupe produit (de ces deux groupes), le groupe  $(G \times H, \star)$  tel que :

$$\forall \ (x_1, y_1)(x_2, y_2) \in G \times H \qquad (x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1 \bot x_2, y_1 \top y_2)$$

Il s'agit bien d'un groupe

Démonstration

**Remarque** - Souvent G = H.

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

3.2. Groupes produits

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

#### 1. Problèmes

#### 2. Lois de composition internes

- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés directes
- 2.3. Induction

#### 3. Structure de groupe

- 3.1. Définition et propriétés
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

- Problèmes
- 2. Lois de
  - 2.1. Définitions
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- .1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

### Groupes triviaux

#### **Exemple** Avec l'addition

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Proprie
- 2.3. Inductio
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

### Groupes triviaux

**Exemple** Avec l'addition

Exemple Avec la multiplication

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Proprié
- 2.3. Inductio
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples



#### Définition - Ensemble des classes d'équivalence modulo n

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , fixé.

La relation  $\equiv_n$  ou encore  $\cdot \equiv \cdot [n]$  est une relation d'équivalence  $\operatorname{sur} \mathbb{Z}$ .

L'ensemble des classes d'équivalence associées est noté  $\frac{\mathbb{Z}}{n^{\mathbb{Z}}}$ .

Un système de représentant est [0, n-1] puisque

$$\frac{\mathbb{Z}}{\frac{n\mathbb{Z}}{k}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\} \text{ où pour tout } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$
 
$$\overline{k} = \{k, k+n, k+2n, \dots, k-n, k-2n, \dots \} = \{k+rn, r \in \mathbb{Z}\}.$$

$$k = \{k, k + n, k + 2n, \dots, k - n, k - 2n, \dots\} = \{k + rn, r \in \mathbb{Z}\}$$

On peut alors définir sur  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  les lois  $\overline{+}$  et  $\overline{\times}$  par :

$$\overline{h} + \overline{k} = \overline{h + k}$$
  $\overline{h} \times \overline{k} = \overline{h \times k}$ 

#### ⇒ Reconnaitre les groupes

3.3. Exemples

#### Définition - Ensemble des classes d'équivalence modulo n

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , fixé.

La relation  $\equiv_n$  ou encore  $\cdot \equiv \cdot [n]$  est une relation d'équivalence  $\operatorname{sur} \mathbb{Z}$ .

L'ensemble des classes d'équivalence associées est noté  $\frac{\mathbb{Z}}{n^{\mathbb{Z}}}$ .

Un système de représentant est [0, n-1] puisque

$$\frac{\mathbb{Z}}{\frac{n\mathbb{Z}}{k}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\} \text{ où pour tout } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$
 
$$\overline{k} = \{k, k+n, k+2n, \dots, k-n, k-2n, \dots \} = \{k+rn, r \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\overline{k} = \{k, k+n, k+2n, \dots, k-n, k-2n, \dots\} = \{k+rn, r \in \mathbb{Z}\}$$

On peut alors définir sur  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  les lois  $\overline{+}$  et  $\overline{\times}$  par :

$$\overline{h} + \overline{k} = \overline{h + k}$$
  $\overline{h} \times \overline{k} = \overline{h \times k}$ 

#### Remarque Le plus dur dans ce qui précède

- 3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$$

# Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +\right)$  est un groupe commutatif.

Son élément neutre est  $\overline{0}$  et l'opposé de  $\overline{k}$  est  $\overline{n-k}$ .

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 1 Dof 8 Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$$

Proposition - Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}},\overline{+}\right)$$

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +\right)$  est un groupe commutatif.

Son élément neutre est  $\overline{0}$  et l'opposé de  $\overline{k}$  est  $\overline{n-k}$ .

#### **Démonstration**

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Proprietes
- 3. Structure de
- groupe
- 3.1. Det & Prop
- 3.2. Groupes produits
  3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$$
?

- I. Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriéte
- 2.3. 1110001011
- 3. Structure de groupe
  - .1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produ
  3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$$
?

Proposition - Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$$
, avec  $p$  premier

Pour tout nombre premier  $p, \left(\frac{\mathbb{Z}^*}{p\mathbb{Z}^*}, \overline{\times}\right)$  est un groupe commutatif.

Son élément neutre est  $\overline{1}$  et l'opposé de  $\overline{k}$  est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

⇒ Reconnaitre les groupes

. Problèmes

2. Lois de

somposition interne

2.2. Propriét

2.3. Induction

3. Structure de groupe

1. Def & Prop

2. Groupes produits

3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$$
?

Proposition - Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$$
, avec  $p$  premier

Pour tout nombre premier p,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$  est un groupe commutatif.

Son élément neutre est  $\overline{1}$  et l'opposé de  $\overline{k}$  est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

#### Exercice

A démontrer

- Problèmes
- 2. Lois de
- - - -
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
  - . Structure de roupe
  - 1. Def & Prop
  - 2. Groupes produits
  - 3.3. Exemples

Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$$
?

Proposition - Groupe 
$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$$
, avec  $p$  premier

Pour tout nombre premier p,  $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$  est un groupe commutatif.

Son élément neutre est  $\overline{1}$  et l'opposé de  $\overline{k}$  est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

#### Exercice

A démontrer

Remarque Autre point de vue.

- Problèmes
- 2. Lois de
- omposition interne
- 2.2. Propriéte
- 2.3. Induction
  - Structure de oupe
  - oupe
  - Groupes produits
  - 3.3. Exemples

#### « Petits »groupes

Analyse Groupe à deux éléments

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### « Petits »groupes

Analyse Groupe à deux éléments

Exercice

Construire un groupe de 3 éléments

- I. Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriete
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$  est un groupe?

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriét
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produ
  3.3. Exemples

 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$  est un groupe?  $(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}),\times)$  est un groupe?

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
  - 2.1. Définitions
- 2.2. Propriéte
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produi
  3.3. Exemples

 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$  est un groupe?  $(\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}),\times)$  est un groupe?  $(GL_{n}(\mathbb{K}),\times)$ ? oui!

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
  - 2.1. Définitions
- 2.2. Propriéte
- 2.5. 110000011
- 3. Structure de groupe
  - 8.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits
  3.3. Exemples

```
\begin{split} &(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+) \text{ est un groupe ?} \\ &(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\times) \text{ est un groupe ?} \\ &(GL_n(\mathbb{K}),\times) ? \text{ oui !} \\ &\text{Autre exemple } (\mathcal{O}_n(\mathbb{K}),\times) ? \text{ où } M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K}) \text{ ssi } M^T \times M = I_n \end{split}
```

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- composition interne
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
  - upe
  - 2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

## Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

#### Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note  $S_X$  l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors  $(S_X, \circ)$  est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X.

- Problèmes
- 2. Lois de
- 0.1 D45-11---
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

### Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

#### Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note  $S_X$  l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors  $(S_X,\circ)$  est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X.

#### Remarque Permutation

Qu'est-ce qu'une permutation de X?

- Problèmes
- 2. Lois de
- composition internes
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- . Structure de roupe
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

## Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

#### Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note  $S_X$  l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors  $(S_X, \circ)$  est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X.

**Remarque** Permutation Qu'est-ce qu'une permutation de *X* ? **Démonstration** 

## ⇒ Reconnaitre les groupes

Problèmes

2. Lois de

omposition in

2.2. Propriétés

2.3. Induction

Structure de

.1. Def & Prop

.2. Groupes produits

3.3. Exemples

## Groupes et géométrie

#### Proposition - Groupes des similitudes directes du plan ${\mathbb C}$

L'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la loi  $\circ$ . L'élément neutre est l'identité.

L'inverse de la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et de rapport k est la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $-\theta$  et de rapport  $\frac{1}{k}$ . L'inverse de la translation de vecteur  $\overrightarrow{u}$  est la translation de vecteur  $-\overrightarrow{u}$ .

- Problèmes
- 2. Lois de
- 04 D/5 W
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

## Groupes et géométrie

### Proposition - Groupes des similitudes directes du plan ${\mathbb C}$

L'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la loi  $\circ$ . L'élément neutre est l'identité.

L'inverse de la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et de rapport k est la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $-\theta$  et de rapport  $\frac{1}{k}$ . L'inverse de la translation de vecteur  $\overrightarrow{u}$  est la translation de vecteur  $-\overrightarrow{u}$ .

#### **Démonstration**

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- composition internes
- 2.2 Propriétés
- 2.3. Induction
- . Structure de
- roupe
- 3.1. Det & Prop
- 3.2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### **Objectifs**

⇒ Reconnaître les groupes

- Problèmes
- 2. Lois de
- 2.1. Définitions
- 2.2. Propriéte
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- Groupes produit

#### **Objectifs**

- ⇒ Reconnaître les groupes
  - Définition avec une certaine stabilité opératoire et passage à l'inverse

- Problèmes
- 2. Lois de
  - 2.1. Définitions
- 2.2. Propriété
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits

#### **Objectifs**

- ⇒ Reconnaître les groupes
  - Définition avec une certaine stabilité opératoire et passage à l'inverse
  - De très nombreux exemples.

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- 0.4 0.75 %
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### **Objectifs**

- ⇒ Reconnaître les groupes
  - Définition avec une certaine stabilité opératoire et passage à l'inverse
  - De très nombreux exemples.

- 1. Problèmes
- 2. Lois de
- 0.4 0.75 %
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### **Objectifs**

- ⇒ Reconnaître les groupes
  - Définition avec une certaine stabilité opératoire et passage à l'inverse
  - De très nombreux exemples.

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 0.1 D45-31---
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de groupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples

#### **Objectifs**

- ⇒ Reconnaître les groupes
  - Définition avec une certaine stabilité opératoire et passage à l'inverse
  - De très nombreux exemples.

#### Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 13 Groupes
- Exercices N°272 & 275

- . Problèmes
- 2. Lois de
- 2.2. Propriétés
- 2.3. Induction
- 3. Structure de proupe
- 3.1. Def & Prop
- .2. Groupes produits
- 3.3. Exemples