



Leçon 41 - Groupes

Leçon 41 - Groupes

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes
2. Lois de composition internes
3. Structure de groupe
 - 3.1. Définition et propriétés
 - 3.2. Groupes produits
 - 3.3. Exemples
4. Sous-groupe
 - 4.1. Définition et caractérisations
 - 4.2. Intersection
 - 4.3. Sous-groupe engendré
5. Morphismes de groupes
 - 5.1. Définition et propriété immédiate
 - 5.2. Image et noyau d'un morphisme
6. Démontage d'un groupe
 - 6.1. Théorème de Lagrange
 - 6.2. Sous-groupe distingué
 - 6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Exemple Avec l'addition

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Exemple Avec l'addition

Exemple Avec la multiplication

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition - Ensemble des classes d'équivalence modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

La relation $\equiv_n$ ou encore $\cdot \equiv \cdot[n]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

L'ensemble des classes d'équivalence associées est noté $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Un système de représentant est $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ puisque

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$\overline{k} = \{k, k+n, k+2n, \dots, k-n, k-2n, \dots\} = \{k+rn, r \in \mathbb{Z}\}$.

On peut alors définir sur $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ les lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ par :

$$\overline{h} \overline{+} \overline{k} = \overline{h+k}$$

$$\overline{h} \overline{\times} \overline{k} = \overline{h \times k}$$

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition - Ensemble des classes d'équivalence modulo n

Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé.

La relation $\equiv_n$ ou encore $\cdot \equiv \cdot[n]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

L'ensemble des classes d'équivalence associées est noté $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.

Un système de représentant est $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ puisque

$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$\overline{k} = \{k, k+n, k+2n, \dots, k-n, k-2n, \dots\} = \{k+rn, r \in \mathbb{Z}\}$.

On peut alors définir sur $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ les lois $\overline{+}$ et $\overline{\times}$ par :

$$\overline{h} \overline{+} \overline{k} = \overline{h+k}$$

$$\overline{h} \overline{\times} \overline{k} = \overline{h \times k}$$

Remarque Le plus dur dans ce qui précède

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$

Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$ est un groupe commutatif.

Son élément neutre est $\overline{0}$ et l'opposé de $\overline{k}$ est $\overline{n-k}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{+}\right)$ est un groupe commutatif.

Son élément neutre est $\overline{0}$ et l'opposé de $\overline{k}$ est $\overline{n-k}$.

Démonstration

$$\text{Groupe } \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times} \right) ?$$

Analyse Et pour la multiplication $\overline{\times}$?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

$$\text{Groupe } \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times} \right) ?$$

Analyse Et pour la multiplication $\overline{\times}$?

Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times} \right)$, avec p premier

Pour tout nombre premier p , $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times} \right)$ est un groupe commutatif.

Son élément neutre est $\overline{1}$ et l'opposé de $\overline{k}$ est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$?

Analyse Et pour la multiplication $\overline{\times}$?

Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$, avec p premier

Pour tout nombre premier p , $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$ est un groupe commutatif.

Son élément neutre est $\overline{1}$ et l'opposé de $\overline{k}$ est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

Exercice

A démontrer

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, \overline{\times}\right)$?

Analyse Et pour la multiplication $\overline{\times}$?

Proposition - Groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$, avec p premier

Pour tout nombre premier p , $\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}^*, \overline{\times}\right)$ est un groupe commutatif.

Son élément neutre est $\overline{1}$ et l'opposé de $\overline{k}$ est obtenu en exploitant le théorème de Bézout (ou autre).

Exercice

A démontrer

Remarque Autre point de vue.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

« Petits »groupes

Analyse Groupe à deux éléments

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

« Petits » groupes

Analyse Groupe à deux éléments

Exercice

Construire un groupe de 3 éléments

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe ?

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe ?

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe ?

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$? oui !

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupes matriciels

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe ?

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe ?

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$? oui !

Autre exemple $(\mathcal{O}_n(\mathbb{K}), \times)$? où $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{K})$ ssi $M^T \times M = I_n$

Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note S_X l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors $(S_X, \circ)$ est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X .

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note S_X l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors $(S_X, \circ)$ est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X .

Remarque Permutation

Qu'est-ce qu'une permutation de X ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupes des permutations

Un groupe très important, on reviendra sur cette notion plus tard...

Proposition - Groupe des permutations d'un ensemble

Soit X un ensemble non vide. On note S_X l'ensemble des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans X). Alors $(S_X, \circ)$ est un groupe, généralement non commutatif, appelé groupe des permutations de X .

Remarque Permutation

Qu'est-ce qu'une permutation de X ?

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Groupes des similitudes directes du plan $\mathbb{C}$

L'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la loi $\circ$.

L'élément neutre est l'identité.

L'inverse de la similitude de centre Ω , d'angle θ et de rapport k est la similitude de centre Ω , d'angle $-\theta$ et de rapport $\frac{1}{k}$.

L'inverse de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Groupes des similitudes directes du plan $\mathbb{C}$

L'ensemble des similitudes directes est un groupe pour la loi $\circ$.

L'élément neutre est l'identité.

L'inverse de la similitude de centre Ω , d'angle θ et de rapport k est la similitude de centre Ω , d'angle $-\theta$ et de rapport $\frac{1}{k}$.

L'inverse de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

Proposition - Élément neutre et symétriques

Soit $H < G$. Alors l'élément neutre de H est l'élément neutre de G .

Si $x \in H$, le symétrique de x dans H est le symétrique de x dans G .

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition

Par la suite, on considérera $(G, \top)$ un groupe.

Définition - Sous-groupe

$H \subset G$ (non vide) est un sous-groupe de G si H est stable pour la loi interne et si la loi induite (restriction de la loi à H) munit H d'une structure de groupe. On note $H < G$

Proposition - Élément neutre et symétriques

Soit $H < G$. Alors l'élément neutre de H est l'élément neutre de G .

Si $x \in H$, le symétrique de x dans H est le symétrique de x dans G .

Démonstration

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- ▶ $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- ▶ $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G si et seulement si il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
(en notation multiplicative : $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
en notation additive : $\forall (x, y) \in H^2, x - y \in H$)

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Savoir-faire. Démontrer que H est un (sous-)groupe

Dans la pratique, lorsque H est une partie de E , groupe. On démontre qu'il s'agit d'un sous-groupe de E

- ▶ avec la caractérisation 1, lorsque H et E sont explicites
- ▶ avec la caractérisation 2, lorsque H et E sont théoriques

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- ▶ $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
 (en notation multiplicative : $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
 en notation additive : $\forall (x, y) \in H^2, x - y \in H$)

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Caractérisations

Théorème - Caractérisation 1

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y \in H$
- ▶ $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème - Caractérisation 2

Soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de G ssi il vérifie :

- ▶ $H \neq \emptyset$
- ▶ $\forall (x, y) \in H^2, x \top y^{-1} \in H$
 (en notation multiplicative : $\forall (x, y) \in H^2, xy^{-1} \in H$;
 en notation additive : $\forall (x, y) \in H^2, x - y \in H$)

Démonstration

Exercice Montrer que si $H_1 < G_1$ et $H_2 < G_2$, alors
 $H_1 \times H_2 < G_1 \times G_2$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Deux groupes

Théorème - Intersection

Soit H et $K < G$. Alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G .

Démonstration

L'exercice suivant donne TOUS les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$:

Exercice

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, $G \neq \{0\}$.
Justifier que $G \cap \mathbb{N}^*$ a un plus petit élément $a > 0$.
Montrer que $G = a\mathbb{Z}$ (utiliser la division euclidienne).

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de (G, T) .

Alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de (G, T) .
Alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

Définition - Groupe engendré

Soit (G, T) un groupe. Soit A une partie de G .

On appelle groupe engendré par A , le plus petit sous-groupe de G , parmi les sous-groupes de G contenant A .

On le note $\langle A \rangle$. On a donc $\langle A \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \min \mathcal{A}$

(où $\mathcal{A} = \{H < G \mid A \subset H\}$). Insistons : on a $A \subset \langle A \rangle$

(d'une certaine façon : $\langle A \rangle = \sup A$).

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Trouver un candidat !

Analyse Plus petit groupe contenant une partie A de G

Définition - Groupe engendré

Soit (G, T) un groupe. Soit A une partie de G .

On appelle groupe engendré par A , le plus petit sous-groupe de G , parmi les sous-groupes de G contenant A .

On le note $\langle A \rangle$. On a donc $\langle A \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \min \mathcal{A}$
(où $\mathcal{A} = \{H < G \mid A \subset H\}$). Insistons : on a $A \subset \langle A \rangle$
(d'une certaine façon : $\langle A \rangle = \sup A$).

Il faut démontrer que $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ est bien le plus petit sous-groupe de G contenant A .

Démonstration

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Croissance de l'engendrement

Si $A \subset B$ sont deux parties d'un groupe G .

Alors $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$ (en fait : $\langle A \rangle \subset \langle \langle B \rangle \rangle$)

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Croissance de l'engendrement

Si $A \subset B$ sont deux parties d'un groupe G .

Alors $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$ (en fait : $\langle A \rangle \subset \langle \langle B \rangle \rangle$)

Démonstration

Application Réflexes

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Application Réflexes

Savoir-faire. Comment trouver le sous-groupe engendré par une partie A ?

Il faut

1. Pré-sentir la bonne description (efficace) de ce sous-groupe. On donne alors un nom à cet ensemble : K .
2. Montrer que K est bien un groupe et qu'il contient A
3. Montrer que K est nécessairement entièrement inclus dans $\langle A \rangle$ ou dans tous sous-groupe de $\mathcal{A}$.

Comme $\langle A \rangle$ est le plus petit sous-groupe contenant A , propriété vérifiée par K , alors $\langle A \rangle = K$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A , alors que visiblement il s'agit de quelque chose qui diminue à partir de G .

A-t-on la même chose ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A , alors que visiblement il s'agit de quelque chose qui diminue à partir de G .

A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A , alors que visiblement il s'agit de quelque chose qui diminue à partir de G .

A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement

Groupe engendré (second point de vue)

Soit A une partie de $(G, \times)$ un groupe.

Alors $x \in \langle A \rangle$ si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_k \in A \cup A^{-1} \text{ tel que } x = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A , alors que visiblement il s'agit de quelque chose qui diminue à partir de G .

A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement

Groupe engendré (second point de vue)

Soit A une partie de $(G, \times)$ un groupe.

Alors $x \in \langle A \rangle$ si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_k \in A \cup A^{-1} \text{ tel que } x = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$$

Exemple Groupes engendré par p dans $\mathbb{Z}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Croissance par engendrement

Attention. Nom contradictoire ?

Ce nom semble contradictoire. Par groupe engendré, on entend plutôt quelque chose qui s'agrandit (pour l'inclusion) à partir de A , alors que visiblement il s'agit de quelque chose qui diminue à partir de G .

A-t-on la même chose ?

Analyse Engendrement

Groupe engendré (second point de vue)

Soit A une partie de $(G, \times)$ un groupe.

Alors $x \in \langle A \rangle$ si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_k \in A \cup A^{-1} \text{ tel que } x = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k$$

Exemple Groupes engendré par p dans $\mathbb{Z}$.

Exercice

Quel est le sous-groupe engendré par $\{p, q\}$ dans $(\mathbb{Z}, +)$?

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$.

Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe monogène

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$.

Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

Savoir-faire. Etudier des groupes monogènes

Si G est un groupe que l'on sait monogène, alors il existe $x \in G$ (référence que l'on fixe) tel que $G = \langle x \rangle$.

L'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, x \mapsto x^k$ est bien définie, et surjective. Elle peut être injective ou non (cas fini).

On transfère ensuite par φ (ou φ^{-1}) l'étude de G , à partir de propriétés de $\mathbb{Z}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe monogène

Définition - Groupe monogène

On dit que G est un groupe monogène, s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$.

Dans ce cas $G = \{x^k, x \in \mathbb{Z}\}$.

Savoir-faire. Etudier des groupes monogènes

Si G est un groupe que l'on sait monogène, alors il existe $x \in G$ (référence que l'on fixe) tel que $G = \langle x \rangle$.

L'application $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, x \mapsto x^k$ est bien définie, et surjective. Elle peut être injective ou non (cas fini).

On transfère ensuite par φ (ou φ^{-1}) l'étude de G , à partir de propriétés de $\mathbb{Z}$.

Exercice

Montrer qu'un groupe monogène est nécessairement abélien

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Exemples à partir de $\mathbb{U}$

L'exercice suivant nous aide à faire le point.

Exercice

On considère le groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

1. Soit $z_k = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Que vaut le groupe $\langle z_k \rangle$?
2. Avec les mêmes notations, que vaut le groupe $\langle z_r, z_s \rangle$?
3. A-t-on pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_n = \langle z \rangle$?
Sinon, à quelle condition sur z , a-t-on : $\mathbb{U}_n = \langle z \rangle$?
4. Quel est le groupe $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$?
5. $\mathbb{U}$ est-il monogène ?

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Soient $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G, \star)$ sur $(G', \top)$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Soient $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G, \star)$ sur $(G', \top)$.

Proposition - Conservation du noyau

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors $f(e_G) = e_{G'}$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Soient $(G, \star)$ et $(G', \top)$ deux groupes.

Définition - Morphisme de groupes

Une application f de G dans G' vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G^2, f(x \star y) = f(x) \top f(y).$$

est appelé morphisme (de groupes) de $(G, \star)$ sur $(G', \top)$.

Proposition - Conservation du noyau

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes. Alors $f(e_G) = e_{G'}$.

Démonstration

Cas de l'inverse

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Cas de l'inverse

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Démonstration

Cas de l'inverse

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Image de l'inverse

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Alors pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Démonstration

Exemple exp

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Soit A un sous-groupe de G , alors $f(A)$ est un sous-groupe de G' .

Soit B un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G .

En particulier :

- ▶ $\text{Im } f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G' , appelé image de G
- ▶ $\text{Ker } f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G , appelé noyau de f .

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Soit A un sous-groupe de G , alors $f(A)$ est un sous-groupe de G' .

Soit B un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G .

En particulier :

- ▶ $\text{Im } f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G' , appelé image de G
- ▶ $\text{Ker } f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G , appelé noyau de f .

Exemple $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe image et sous-groupe réciproque

Proposition - Sous-groupe

Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

Soit A un sous-groupe de G , alors $f(A)$ est un sous-groupe de G' .

Soit B un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G .

En particulier :

- ▶ $\text{Im } f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$ est un sous-groupe de G' , appelé image de G
- ▶ $\text{Ker } f = f^{-1}(e_{G'}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\}$ est un sous-groupe de G , appelé noyau de f .

Exemple $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_n$

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Exercice

Montrer que $f : G \rightarrow G'$ morphisme de groupes est :

- ▶ surjective ssi $\text{Im } f = G'$
- ▶ injective ssi $\text{Ker } f = \{e_G\}$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G .
On note $\mathcal{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a\mathcal{R}_H a' \iff a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G .
On note $\mathcal{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a\mathcal{R}_H a' \longleftrightarrow a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème de Lagrange

Proposition - Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et $H < G$, un sous-groupe de G .
On note $\mathcal{R}_H$, la relation définie sur G par :

$$a\mathcal{R}_H a' \longleftrightarrow a^{-1} * a' \in H$$

Alors $\mathcal{R}_H$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

Remarque Lien : relation d'équivalence et sous-groupe

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G .

On note $S := S_{\frac{G}{\mathcal{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathcal{R}_H$.

Alors $G = \uplus_{a \in S} \bar{a}$, la réunion disjointes des classes de a .
 $\bar{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H .

Par la suite, on notera aH , cet ensemble. On a donc

$$aH = a'H \Leftrightarrow a\mathcal{R}_Ha' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$$

Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G .

On note $S := S_{\frac{G}{\mathcal{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathcal{R}_H$.

Alors $G = \uplus_{a \in S} \bar{a}$, la réunion disjointes des classes de a .
 $\bar{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H .

Par la suite, on notera aH , cet ensemble. On a donc

$$aH = a'H \Leftrightarrow a\mathcal{R}_Ha' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$$

Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Décomposition

Quand on a une relation d'équivalence, on a naturellement une décomposition en réunion disjointe

Proposition - Décomposition de G

Soit H un sous-groupe de G .

On note $S := S_{\frac{G}{\mathcal{R}_H}}$ un système de représentant des classes d'équivalences de $\mathcal{R}_H$.

Alors $G = \uplus_{a \in S} \bar{a}$, la réunion disjointes des classes de a .
 $\bar{a}$ n'est pas un groupe, mais il est en bijection avec H .

Par la suite, on notera aH , cet ensemble. On a donc

$$aH = a'H \Leftrightarrow a\mathcal{R}_Ha' \Leftrightarrow a^{-1}a' \in H$$

Le produit cartésien $H \times S$ et le groupe G sont en bijection (c'est la décomposition).

Démonstration

En fait, les $\bar{a}$ sont comme des sous-groupes affines de G ...

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème de Lagrange

Proposition - Théorème de LAGRANGE

Si H un sous-groupe de G , groupe de cardinal fini, alors $\text{card}H \mid \text{card}G$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème de Lagrange

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Proposition - Théorème de LAGRANGE

Si H un sous-groupe de G , groupe de cardinal fini, alors $\text{card}H \mid \text{card}G$.

Démonstration

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

Définition - Sous-groupe distingué

On dit que $H < G$ est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si

$$\forall a \in G, \forall x \in H, \quad a^{-1}xa \in H$$

On peut retenir que pour tout $a \in G$, $aH = Ha$.

On note alors $H \triangleleft G$

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe distingué

⇒ Décomposer les groupes

Analyse S comme un groupe ?

Définition - Sous-groupe distingué

On dit que $H < G$ est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si

$$\forall a \in G, \forall x \in H, \quad a^{-1}xa \in H$$

On peut retenir que pour tout $a \in G$, $aH = Ha$.

On note alors $H \triangleleft G$

Démonstration

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Sous-groupe distingué

Analyse S comme un groupe ?

Définition - Sous-groupe distingué

On dit que $H < G$ est un sous-groupe distingué (ou normal) de G si

$$\forall a \in G, \forall x \in H, \quad a^{-1}xa \in H$$

On peut retenir que pour tout $a \in G$, $aH = Ha$.

On note alors $H \triangleleft G$

Démonstration

Exemple $\text{Ker } f$ est un sous-groupe distingué

$\Rightarrow$ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué de G , alors $S = \frac{G}{\mathcal{R}_H}$,

souvent noté $\frac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par
 $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué de G , alors $S = \frac{G}{\mathcal{R}_H}$,

souvent noté $\frac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par
 $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

Exercice

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué de G , alors $S = \frac{G}{\mathcal{R}_H}$,

souvent noté $\frac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par
 $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

Exercice

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

Exemple Groupe trivial

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Groupe quotient

Proposition - Groupe quotient

Soit $(G, *)$ un groupe.

Si $H \triangleleft G$ est un sous-groupe distingué de G , alors $S = \frac{G}{\mathcal{R}_H}$,

souvent noté $\frac{G}{H}$ est un groupe pour la loi $\overline{*}$ définie par
 $aH \overline{*} bH = (a * b)H$.

Exercice

A démontrer ! (Attention, ce n'est pas un sous-groupe. Il faut donc tout redémontrer à commencer par la bonne définition de la loi...)

Exemple Groupe trivial

Exemple G abélien

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition - Groupe simple

On dit qu'un groupe est simple lorsqu'il ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{e\}$ et lui-même

Cela ne vous rappelle pas une autre définition ?

Groupe simple

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Définition - Groupe simple

On dit qu'un groupe est simple lorsqu'il ne possède pas de sous-groupe distingué autre que $\{e\}$ et lui-même

Cela ne vous rappelle pas une autre définition ?

Exercice

Soit G un groupe de cardinal p , premier.

Montrer que G est simple

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Définition et propriétés

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. Sous-groupe engendré

5. Morphismes de groupes

5.1. Définition et propriété immédiate

5.2. Image et noyau d'un morphisme

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Si $\text{Ker } f$ est distingué...

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \frac{G}{\text{Ker } f} \rightarrow \text{Im } f$ (bijectif).

Si $\text{Ker } f$ est distingué...

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \frac{G}{\text{Ker } f} \rightarrow \text{Im } f$ (bijectif).

Démonstration

Si $\text{Ker } f$ est distingué...

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Théorème - Premier théorème

Soient G et G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$, un morphisme de groupes.

Alors f induit un isomorphisme de groupes : $\hat{f} : \frac{G}{\text{Ker } f} \rightarrow \text{Im } f$ (bijectif).

Démonstration

Remarque Notation symbolique ou formelle

Objectifs

⇒ Décomposer les groupes

⇒ Décomposer les groupes

- 1. Problèmes
- 2. Lois de composition internes
- 3. Structure de groupe
 - 3.1. Def & Prop
 - 3.2. Groupes produits
 - 3.3. Exemples
- 4. Sous-groupe
 - 4.1. Définition et caractérisations
 - 4.2. Intersection
 - 4.3. S-G engendré
- 5. Morphismes
 - 5.1. Def & Prop
 - 5.2. Im et Ker
- 6. Démontage d'un groupe
 - 6.1. Théorème de Lagrange
 - 6.2. Sous-groupe distingué
 - 6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposer les groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposer les groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?
- ▶ Décomposition (démontage) d'un groupe avec des groupes distingués.

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposer les groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un sous-groupe ? Un groupe engendré ?
- ▶ Décomposition (démontage) d'un groupe avec des groupes distingués.
- ▶ Morphisme de groupes et propriétés immédiates

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme

Objectifs

⇒ Décomposer les groupes

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 15 - Divisibilité et congruence sur $\mathbb{Z}$
- ▶ Exercices N° 277, 280 & 282

⇒ Décomposer les groupes

1. Problèmes

2. Lois de composition internes

3. Structure de groupe

3.1. Def & Prop

3.2. Groupes produits

3.3. Exemples

4. Sous-groupe

4.1. Définition et caractérisations

4.2. Intersection

4.3. S-G engendré

5. Morphismes

5.1. Def & Prop

5.2. Im et Ker

6. Démontage d'un groupe

6.1. Théorème de Lagrange

6.2. Sous-groupe distingué

6.3. Premier théorème d'isomorphisme