

⇒ Quelques suites classiques

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites classiques

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Problème Suite de FIBONACCI

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Problème Suite de FIBONACCI

Problème Forme fermée (ou forme close)

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Problème Suite de FIBONACCI

Problème Forme fermée (ou forme close)

Problème Suites convergentes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Problème Suite de FIBONACCI

Problème Forme fermée (ou forme close)

Problème Suites convergentes

Problème Suite divergente vers l'infini

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Problème Suite de FIBONACCI

Problème Forme fermée (ou forme close)

Problème Suites convergentes

Problème Suite divergente vers l'infini

Problème Suite qui ne ...pas à partir d'un certain rang

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites classiques

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Définition

⇒ Quelques suites
classiques

On verra plus loin (lorsque nous disposerons d'autres outils) le cas des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

En dehors des suites géométriques et arithmétiques, il y a quelques autres types de suites à savoir étudier.

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

Définition

⇒ Quelques suites
classiques

On verra plus loin (lorsque nous disposerons d'autres outils) le cas des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

En dehors des suites géométriques et arithmétiques, il y a quelques autres types de suites à savoir étudier.

Définition - Suites arithmético-géométrique

Une suite (u_n) (réelle ou complexe) est dite arithmético-géométrique si elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$.

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Savoir-faire. Etudier une suite arithmético-géométrique

Pour étudier une telle suite,

1. on cherche un point fixe c : tel que $c = ac + b$
2. on introduit la suite $(v_n) = (u_n - c)$. Elle est géométrique de raison a .

On a donc $u_n = a^n(u_0 - c) + c$

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Savoir-faire. Etudier une suite arithmético-géométrique

Pour étudier une telle suite,

1. on cherche un point fixe c : tel que $c = ac + b$
2. on introduit la suite $(v_n) = (u_n - c)$. Elle est géométrique de raison a .

On a donc $u_n = a^n(u_0 - c) + c$

Exercice

Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$.

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites classiques

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Définition

⇒ Quelques suites
classiques

Définition - Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) définie par

$$u_0 \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

où $(a, b, c) \in K^3$, $a \neq 0, c \neq 0$.

On note E l'ensemble des suites qui vérifie cette relation On lui associe une équation dite caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Théorème - Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique.

Pour $K = \mathbb{C}$ (a, b, c complexes) :

- ▶ si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- ▶ si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

⇒ Quelques suites
classiques

Théorème - Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique.

Pour $K = \mathbb{R}$ (a, b, c réels) :

- ▶ si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- ▶ si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- ▶ si $\Delta < 0$ et $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ racines complexes,

$$\begin{aligned} E &= \{\lambda(\mathbf{Re}(r^n))_{n \in \mathbb{N}} + \mu(\mathbf{Im}(r^n))_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\} \\ &= \{\lambda(\rho^n \cos n\theta)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(\rho^n \sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Savoir-faire. Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour étudier une telle suite réelle,

1. on définit l'équation caractéristique associée

2. on calcule le discriminant :

- ▶ Si $\Delta > 0$ de racines r_1 et r_2 ;
 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$.
- ▶ Si $\Delta = 0$ de racine (double) r ;
 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A_1 + A_2 n) r^n$.
- ▶ Si $\Delta < 0$ de racines $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$;
 $\exists A \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A r_1^n + \overline{A} r_2^n$.
 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},$
 $u_n = \rho^n (A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)).$

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Avec un second membre

⇒ Quelques suites
classiques

Savoir-faire. Et s'il y a un second membre ?

La résolution se fait comme pour les EDL2 à coefficients constants.

1. On cherche une solution particulière (de la même forme que le second membre et/ou par tâtonnement)
2. On cherche l'ensemble des solutions du problème homogène.

L'ensemble des solutions est la somme de la solution particulière et de l'espace des solutions du problème homogène (ce qui forme un espace affine).

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Avec un second membre

⇒ Quelques suites
classiques

Savoir-faire. Et s'il y a un second membre ?

La résolution se fait comme pour les EDL2 à coefficients constants.

1. On cherche une solution particulière (de la même forme que le second membre et/ou par tâtonnement)
2. On cherche l'ensemble des solutions du problème homogène.

L'ensemble des solutions est la somme de la solution particulière et de l'espace des solutions du problème homogène (ce qui forme un espace affine).

Remarque Démonstrations

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

⇒ Quelques suites
classiques

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

- ▶ Suites arithmétiques, géométriques.

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

- ▶ Suites arithmétiques, géométriques.
- ▶ Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = qu_n + r$.

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

- ▶ Suites arithmétiques, géométriques.
- ▶ Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = qu_n + r$.
On considère ℓ tel que $\ell = q\ell + r$ et on étudie $(u_n - \ell)$

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

- ▶ Suites arithmétiques, géométriques.
- ▶ Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = qu_n + r$.
On considère ℓ tel que $\ell = q\ell + r$ et on étudie $(u_n - \ell)$
- ▶ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

- ▶ Suites arithmétiques, géométriques.
- ▶ Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = qu_n + r$.
On considère ℓ tel que $\ell = q\ell + r$ et on étudie $(u_n - \ell)$
- ▶ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$
On considère les racines r_1, r_2 de $ar^2 + br + c$.
 (u_n) est une c.l. des suites (r_1^n) et (r_2^n) .

⇒ Quelques suites
classiques

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2

⇒ Quelques suites
classiques

Objectifs

⇒ Quelques suites classiques

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 18- Suites numériques
 - 3. Suites extraites
 - 4. Limite d'une suite
- ▶ Exercices N° 351 & 361

1. Problèmes

2. Exemples
fondamentaux

2.1. Suites
arithmético-géométriques

2.2. Suites récurrentes linéaires
homogène d'ordre 2