

Leçon 38 - Suites numériques

Leçon 38 - Suites numériques

- Problemes
- Exemples
- Extractio
- 4. Limite
- 4.1. Suites o
- Valeur d'adhérence d'un suite
- 4.3. Suites div
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- 1. Problèmes
- 2. Exemples fondamentaux
- 3. Suites extraites
- 4. Limite d'une suite réelle
 - 4.1. Suites convergentes
 - 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
 - 4.3. Suites divergentes
 - 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- . Problème:
- Exemples
- . Extraction
- . Limites
- 4.1. Suites convergentes
- Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes

Problèmes

- 2. Exemples fondamentaux
- 3. Suites extraites
- 4. Limite d'une suite réelle
 - 4.1. Suites convergentes
 - 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
 - 4.3. Suites divergentes
 - 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- 1. Problèmes
- 2. Exemples
- . Extraction
- . Limites
- - uite
- 4.3. Suites
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - .5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

- 1. Problème
- 2. Exemples
- Extraction
- 4. Limites
- 4.1. Suites convergentes
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites d
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit "des gendarmes"

Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec
$$(u_n) = (-w_n)$$
:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \le \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

- 1. Problèmes
- z. Exemple:
- Limites
- 4.1. Suites convergentes
- suite
- 4.3. Suites div
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit "des gendarmes"

Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ trois suites réelles et $\ell\in\mathbb{R}.$ On suppose que

$$\forall n\geqslant n_0, u_n\leqslant v_n\leqslant w_n, \text{ et que } \lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}w_n=\ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec
$$(u_n) = (-w_n)$$
:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n-\ell| \le \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration

⇒ Méthodes

. Problèmes

z. Exemple:

I. Limites

I.1. Suites convergentes

uite

4.3. Suites

 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

I.5. Extension aux suites complexes

implexes 6. Bilan sur les théorèr

l'existence de limites

vraies.

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie : $\exists \ n_1 \in \mathbb{N} \ \text{tel que} \ \forall \ n \geqslant n_1, \, \mathscr{P}_n,$ et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie : $\exists \ n_2 \in \mathbb{N} \ \text{tel que} \ \forall \ n \geqslant n_2, \, \mathscr{P}'_n,$ Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2), \, \mathscr{P}_n$ et \mathscr{P}'_n sont

- . Probleme
- Exemples
- D. EXII GOLIO
- Limites
- 4.1. Suites convergentes
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites di
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 5. Extension aux suites
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie : $\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \mathscr{P}_n,$ et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie : $\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_2, \mathscr{P}'_n$ Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, \mathscr{P}_n et \mathscr{P}'_n sont vraies.

Exercice

Montrer que la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

Divergence (infinie) par encardrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Leçon 38 - Suites numériques

- . Probleme
- LXCITIPIOS
- ____
- Limites
- 4.1. Suites con
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites diver
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 4.5. Extension aux suites.
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm \infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors

$$(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow (v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$(v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow (u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

- Evennles
- . Extraction
- . Limites
- 4.1. Suites convergente
- Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites d
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm \infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$. Alors

$$\begin{array}{c} (u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow (v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ (v_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow (u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \end{array}$$

Exercice

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.

- 1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t}$. En déduire que (S_n) diverge.
- 2. Prouver que $\left(\frac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

⇒ Méthodes

E.........

. Extraction

I. Limites

4.1. Suites convergentes

1.3 Suites divernentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation

d'ordre 4.5. Extension aux suites

complexes

d'existence de limites

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation

Théorème - Opérations sur les limites

Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :

- la suite ($|u_n|$) converge vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n+v_n), (u_nv_n), (\frac{1}{u_n}), (\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) . ℓ et ℓ' sont des réels.

1. Limite d'une somme

$\lim(u_n) =$	ℓ	ℓ	ℓ	+∞	$-\infty$	+∞
$\lim(v_n) =$	ℓ'	+∞	$-\infty$	+∞	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim(u_n + v_n) =$						

2. Limite d'un produit

$\lim(u_n) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim(v_n) =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(u_n \times v_n) =$				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

- I. FIUDIE
 - Exemples
- . Limites
- 4.1. Suites convergentes
- suite
- 4.3. Suites divi
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - . Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n+v_n), (u_nv_n), (\frac{1}{u_n}), (\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) . ℓ et ℓ' sont des réels.

3. Limite de l'inverse

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	$0 \text{ avec } u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. Limite d'un quotient

		•					
$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	0	∞	$\ell \neq 0$
			$(v_n)_{n \geqslant n_0} \geqslant 0$		$(v_n)_{n \ge n_0} \ge 0$		
$\lim \frac{u_n}{}=$							
v_n							

\Rightarrow Méthodes

- 1. Problè
- 2. Exemples
- - I. Limites
 - 4.1. Suites convergentes
 4.2 Valeur d'adhérence d'un
 - 4.2. Valeur d'adherence d'une suite
 - 4.3. Suites divergentes
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - Extension aux suite mplexes
 - Bilan sur les théorèmes existence de limites

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n+v_n), (u_nv_n), (\frac{1}{u_n}), (\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) . ℓ et ℓ' sont des réels.

3. Limite de l'inverse

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	$0 \text{ avec } u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. Limite d'un quotient

$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	0	∞	$\ell \neq 0$
			$(v_n)_{n \ge n_0} \ge 0$		$(v_n)_{n \ge n_0} \ge 0$		
$\lim \frac{u_n}{v_n} =$							

Démonstration

- 1. Problè
- . Exemples
- - 1. Limites
- 4.1. Suites convergentes
- suite
- 4.3. Suites divergentes
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- .5. Extension aux suite omplexes
- .6. Bilan sur les théorèmes l'existence de limites

Il faut bien différencier un « montrer que $\forall \ \epsilon$ »et un « exploiter un $\forall \ \epsilon$ ».

- 1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall \epsilon > 0...$
 - a. On prend $\epsilon>0$, fixé et quelconque
 - b. et on agit avec lui. . . .
- 2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall \ \epsilon > 0...$ On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque, bien choisi.

- - Exemples
- o. Extraction
- I. Limites
- 4.1. Suites convergentes
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites di
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation

Application Lemme de CESARO

Savoir-faire, Gérer ϵ

Il faut bien différencier un « montrer que $\forall \ \epsilon$ »et un « exploiter un $\forall \epsilon ...$

- 1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall \epsilon > 0...$
 - a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
 - b. et on agit avec lui. . . .
- 2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall \epsilon > 0...$
 - On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque, bien choisi.

⇒ Méthodes

- 1. Problèmes
- 2. Exemples fondamentaux
- 3. Suites extraites
- 4. Limite d'une suite réelle
 - 4.1. Suites convergentes
 - 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
 - 4.3. Suites divergentes
 - 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- 1. Problémes
 - Exemples
- . Extraction
- Limites
- 4.1. Sulles convergentes
- 4.2. Valeur d'adhèrence d'une suite
- 4.3. Suites divergent
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre.
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4.5 Extension aux suites

Définition - Cas des suites complexes (bornées...)

Soit (u_n) une suite de complexes.

- \triangleright On dit que la suite (u_n) est bornée si la suite réelle des modules ($|u_n|$) est majorée.
- ▶ Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle ($|u_n - \ell|$) converge vers 0. On note $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4.5 Extension aux suites

Définition - Convergence

La suite complexe (u_n) converge vers le complexe ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Attention $|u_n - \ell|$ désigne ici le module du complexe $u_n - \ell$.

A partir de cette définition, on voit que bon nombre de résultats subsistent pour les suites complexes :

- la limite, lorsqu'elle existe, est unique;
- si $|u_n \ell| \le \alpha_n$ où (α_n) est une suite réelle qui converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ ;
- les opérations (somme, produit, inverse, quotient) sur les limites restent valables ;

Vu plus loin:

- toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite;
- si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge.

- i. Problemes
- Exemples
- B. Extraction
- 4. Limites
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une
- suite
- 4.3. Suites divergente
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

plus de sens ici (inégalités).

Attention, Relation d'ordre dans €?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans R n'ont

4.5 Extension aux suites complexes

4□ > 4□ > 4 = > 4 = > = 90

4.5 Extension aux suites

Attention, Relation d'ordre dans C?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans R n'ont plus de sens ici (inégalités).

Savoir-faire. Souvent pour l'étude de suites complexes

On peut également, pour étudier une suite complexe, se ramener à deux suites réelles, selon la proposition qui suit...

Et si on veut raisonner pour la convergence par encadrement (vers 0), on note que:

$$|\mathbf{Re}(u_n)| \leq |u_n| \text{ et } |\mathbf{Im}(u_n)| \leq |u_n|.$$
 et $|u_n| = \sqrt{\mathbf{Re}^2(u_n) + \mathbf{Im}^2(u_n)} \leq |\mathbf{Re}(u_n)| + |\mathbf{Im}(u_n)|.$ (différence entre module et valeur absolue. . .

Soit (u_n) une suite complexe.

 (u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles ($\mathbf{Re}(u_n)$) et ($\mathbf{Im}(u_n)$) le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = (\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to+\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

- 4.5 Extension aux suites

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

 (u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles ($\mathbf{Re}(u_n)$) et ($\mathbf{Im}(u_n)$) le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=(\lim_{n\to+\infty}\mathbf{Re}(u_n))+i(\lim_{n\to+\infty}\mathbf{Im}(u_n)).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

- 4.5 Extension aux suites

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

 (u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles ($\mathbf{Re}(u_n)$) et ($\mathbf{Im}(u_n)$) le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=(\lim_{n\to+\infty}\mathbf{Re}(u_n))+i(\lim_{n\to+\infty}\mathbf{Im}(u_n)).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Démonstration

4.5 Extension aux suites

4.2. Valeur d'adhérence d'une

4.3. Suites divergentes

d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > 4 B > 4 C >

Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- 1. Montrer que la suite géométrique (z^n) est convergente si et seulement si |z| < 1 ou z = 1.
- 2. Montrer que la suite (S_n) définie par

$$S_n = 1 + z + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k$$
 (on dit que (S_n) est une série géométrique) converge si et seulement si $|z| < 1$ et que la limite vaut alors $\frac{1}{1-z}$.

⇒ Méthodes

- 1. Problèmes
- 2. Exemples fondamentaux
- 3. Suites extraites
- 4. Limite d'une suite réelle
 - 4.1. Suites convergentes
 - 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
 - 4.3. Suites divergentes
 - 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
 - 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- 1. Problèmes
- . Exemples
- . Extraction
- I. Limites
-
- 4.1. Suites convergentes
- 4.2. Valeur d'adhèrence d'une suite
- 4.3. Suites divergen
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

démontrer la convergence ET donner la limite.

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut

4. Limites

4.1. Suites converge

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

I.3. Suites divergen

d'ordre

4.5. Extension aux suites

4.5. Extension aux suites complexes

 Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Limites

Suites convergentes
 Valeur d'adhérence d'une

4.3. Suites divergentes

d'ordre

5. Extension aux suites implexes

 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n, $u_n \le v_n \le w_n$ et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ . Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier $n, u_n \le v_n \le w_n$ et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ . Alors (v_n) converge et $\lim (v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par minoration

Si pour tout entier $n, u_n \leq v_n$ et pour (u_n) diverge vers $+\infty$.

Alors (v_n) diverge et $\lim (v_n) = +\infty$

- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4.3. Suites divergentes

l'ordre

n Extension aux suite mplexes

 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n, $u_n \le v_n \le w_n$ et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ . Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par majoration

Si pour tout entier n, $v_n \le w_n$ et pour (w_n) diverge vers $-\infty$.

Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = -\infty$

Quelques rappels:

- Problème
- Exemples
- Extractio
- 1 Limites
- 4.1 Suites converne
- 4.2. Valeur d'adhérence d'un
- 4.3. Suites divergentes
- suites/les limites et relatio d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

3. Extraction

4. Limite

4.1 Suites convern

4.2. Valeur d'adhérence d'un

4.3. Suites divergentes

suites/les limites et relatio d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Quelques rappels:

Valeur d'adhérence d'une suite

. Extractic

Limites

4.2. Valeur d'adhérence d'une

4.3. Suites divergent

suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

 Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Quelques rappels:

- Valeur d'adhérence d'une suite
- ightharpoonup Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

4.6 Rilan our las thánrámas d'existence de limites

Quelques rappels:

- Valeur d'adhérence d'une suite
- ightharpoonup Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ . Alors (u_n) converge vers ℓ

4.6 Rilan our las thánrámas d'existence de limites

Quelques rappels:

- Valeur d'adhérence d'une suite
- ightharpoonup Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ . Alors (u_n) converge vers ℓ

Remarque Si $\ell = \infty$.

4.6 Rilan our las thánrámas d'existence de limites

Quelques rappels:

- Valeur d'adhérence d'une suite
- ightharpoonup Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ . Alors (u_n) converge vers ℓ

Remarque Si $\ell = \infty$.

Démonstration

3. Extraction

4. Limite

44.00

4.2 Valour d'adháranna d'un

Valeur d'adherence d'une suite

4.3. Suites

 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Exercice

On considère une suite réelle (u_n) telle que les suites $(u_{2n}),(u_{2n+1}),(u_{3n})$ convergent. Montrer que la suite (u_n) est convergente. Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

- 1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- 2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

- Evemnles
- Extraction
- 1. Limites
- 4.1. Suites converger
- Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites diverger
- 4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
 - 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

- 1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- 2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

⇒ Méthodes

Evtractio

Limites

4.1 Suites com

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites diverg

4.4. Opérations sur les

ordre 5. Extension aux suites

 .5. Extension aux suite omplexes

 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

- 1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- 2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

Corollaire - Version décroissante

Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :

- 1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
- 2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

- I. Problèn
- . Exemples
- s. Extractio
- Limites
- .1. Suites convergentes
- J.2. Valeur d'adhèrence d'une suite
- I.3. Suites divergente
- suites/les limites et relation d'ordre
 - i. Extension aux suite
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- les deux suites sont monotones de sens contraire;
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

4.6. Bilan sur les théorèmes

d'existence de limites

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- les deux suites sont monotones de sens contraire :
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Théorème - Convergence pour suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

- 1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
- 2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

- . Exemples
- Extractio
- 4. Limites
- 4.1. Suites convergente
- Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites of
- suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

- 1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
- 2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Savoir-faire. Montrer la convergence avec deux sous-suites adjacentes

Il arrive souvent que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes (dans ce cas il faut le démontrer), on en déduit alors la convergence de (u_n) d'après le critère de convergence par suites extraites totales. C'est le cas :

- ightharpoonup si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et |f'| < 1
- si $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ avec $(u_k) \setminus 0$ (critère de Leibniz)...

- . Problème
- Exemples
- . Extraction
- . Limites
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une
- 4.3 Suites divergentes
- 4.4. Opérations sur les
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Objectifs

- Limites
- 4.1. Suites convergentes
- Valeur d'adhérence d'ur suite
- .3. Suites divergentes
- suites/les limites et relatio d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes

- ⇒ Méthodes
 - Encadrement

- Dualdàna
- Evennelse
- Extractio
- Limites
- ---
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une
- O. Cuitas disconnector
- suites/les limites et relatio d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes

- ⇒ Méthodes
 - Encadrement
 - Suites extraites

- Evemples
- 3. Extraction
- 1 Limites
- ---
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une
- I.3. Suites divergentes
- 4.4. Opérations sur les
- 4.5. Extension aux suites
- complexes

- ⇒ Méthodes
 - Encadrement
 - Suites extraites
 - Suite monotone (et bornée)

- ____
- ____
- . Extraction
- Limites
- T. Littillos
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une
- 4.3. Suites divergentes
- suites/les limites et relatio d'ordre
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- ⇒ Méthodes
 - Encadrement
 - Suites extraites
 - Suite monotone (et bornée)
 - Suites adjacentes

\Rightarrow Méthodes

- 1. Problème
 - Exemples
- Extraction
- Limites
- 4.4 Cuites es
- 4.2. Valour d'adhérance d'un
- 4.2. valeur d'adherence d'une suite
- 4.3. Suites of
- d'ordre
- 4.5. Extension aux suites complexes
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

- 1. Problème
- . . .
- 4. Limites
- 4.1. Suites convergentes
- 4.2. Valeur d'adhérence d'une suite
- 4.3. Suites divergentes
- Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre
- 4.5. Extension aux suites
- 4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites
- 'existence de limites

Objectifs

⇒ Méthodes

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 18 Suites numériques5. Analyse asymptotique
- Exercices N°357 & 359
- TD de jeudi :

8h-10h: 362, 369, 371, 373, 379

10h-12h: 363, 370, 372, 375, 383