



4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement (sandwich)

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit “des gendarmes”

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \mathcal{P}_n$,

et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, \mathcal{P}'_n$,

Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}'_n$ sont vraies.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

Savoir-faire. A partir de deux certains rangs

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \mathcal{P}_n,$$

et à partir d'un certain second rang une autre propriété vraie :

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_2, \mathcal{P}'_n,$$

Alors, à partir d'un certain rang $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}'_n$ sont vraies.

Exercice

Montrer que la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors

$$\begin{aligned} (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty &\Rightarrow (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty &\Rightarrow (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Divergence (infinie) par encadrement

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors

$$\begin{aligned} (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty &\Rightarrow (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ (v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty &\Rightarrow (u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \end{aligned}$$

Exercice

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$.

En déduire que (S_n) diverge.

2. Prouver que $\left(\frac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Opérations sur les limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Opérations sur les limites

Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et (v_n) une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :

- la suite $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers $\ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) .

ℓ et ℓ' sont des réels.

1. Limite d'une somme

$\lim(u_n) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(v_n) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim(u_n + v_n) =$						

2. Limite d'un produit

$\lim(u_n) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim(v_n) =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(u_n \times v_n) =$				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) .
 ℓ et ℓ' sont des réels.

3. Limite de l'inverse

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. Limite d'un quotient

$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0 $(v_n)_{n \geq n_0} \geq 0$	∞	0 $(v_n)_{n \geq n_0} \geq 0$	∞	$\ell \neq 0$
$\lim \frac{u_n}{v_n} =$							

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

A savoir-faire

Savoir-faire. A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, de (u_n) et (v_n) .
 ℓ et ℓ' sont des réels.

3. Limite de l'inverse

$\lim(u_n) =$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $\lim(\frac{1}{u_n}) =$				

4. Limite d'un quotient

$\lim(u_n) =$	ℓ	0	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	∞
$\lim(v_n) =$	$\ell' \neq 0$	0	0 $(v_n)_{n \geq n_0} \geq 0$	∞	0 $(v_n)_{n \geq n_0} \geq 0$	∞	$\ell \neq 0$
$\lim \frac{u_n}{v_n} =$							

Démonstration

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Gérer ϵ

⇒ Méthodes

Savoir-faire. Gérer ϵ

Il faut bien différencier un « montrer que $\forall \epsilon$ » et un « exploiter un $\forall \epsilon$ ».

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall \epsilon > 0$. . .

- a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
- b. et on agit avec lui. . .

2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall \epsilon > 0$. . .

On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
bien choisi.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Gérer ϵ

⇒ Méthodes

Savoir-faire. Gérer ϵ

Il faut bien différencier un « montrer que $\forall \epsilon$ » et un « exploiter un $\forall \epsilon$ ».

1. Si il s'agit de **montrer** que $\forall \epsilon > 0$
 - a. On prend $\epsilon > 0$, fixé et quelconque
 - b. et on agit avec lui. . . .
2. Si il s'agit de **exploiter** que $\forall \epsilon > 0$

On considère arbitrairement un $\epsilon > 0$, fixé et quelconque,
bien choisi.

Application Lemme de CESARO

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Définition - Cas des suites complexes (bornées...)

Soit (u_n) une suite de complexes.

- ▶ On dit que la suite (u_n) est bornée si la suite réelle des modules $(|u_n|)$ est majorée.
- ▶ Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0. On note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Convergence complexe

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Définition - Convergence

La suite complexe (u_n) converge vers le complexe ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Attention $|u_n - \ell|$ désigne ici le module du complexe $u_n - \ell$.

⇒ Méthodes

Proposition - Généralisation

A partir de cette définition, on voit que bon nombre de résultats subsistent pour les suites complexes :

- la limite, lorsqu'elle existe, est unique ;
- si $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ où (α_n) est une suite réelle qui converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ ;
- les opérations (somme, produit, inverse, quotient) sur les limites restent valables ;

Vu plus loin :

- toute suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite ;
- si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Deux suites réelles

⇒ Méthodes

Attention. Relation d'ordre dans $\mathbb{C}$?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ n'ont plus de sens ici (inégalités).

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Deux suites réelles

⇒ Méthodes

Attention. Relation d'ordre dans $\mathbb{C}$?

En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ n'ont plus de sens ici (inégalités).

Savoir-faire. Souvent pour l'étude de suites complexes

On peut également, pour étudier une suite complexe, se ramener à deux suites réelles, selon la proposition qui suit. . .

Et si on veut raisonner pour la convergence par encadrement (vers 0), on note que :

$$|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \text{ et } |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|.$$

$$\text{et } |u_n| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(u_n) + \operatorname{Im}^2(u_n)} \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|.$$

(différence entre module et valeur absolue. . .

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Deux suites réelles

⇒ Méthodes

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles (**Re** (u_n)) et (**Im** (u_n)) le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Deux suites réelles

⇒ Méthodes

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles ($\mathbf{Re}(u_n)$) et ($\mathbf{Im}(u_n)$) le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Deux suites réelles

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement les suites réelles $(\mathbf{Re}(u_n))$ et $(\mathbf{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux. En cas de convergence on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Re}(u_n)) + i(\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Im}(u_n)).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Démonstration

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite géométrique (z^n) est convergente si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$.

2. Montrer que la suite (S_n) définie par

$$S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k \quad (\text{on dit que } (S_n) \text{ est une série}$$

géométrique) converge si et seulement si $|z| < 1$ et que la limite vaut alors $\frac{1}{1-z}$.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

3. Suites extraites

4. Limite d'une suite réelle

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement

⇒ Méthodes

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement

⇒ Méthodes

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n , $u_n \leq v_n \leq w_n$
 et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ .
 Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n , $u_n \leq v_n \leq w_n$
 et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ .
 Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par minoration

Si pour tout entier n , $u_n \leq v_n$
 et pour (u_n) diverge vers $+\infty$.
 Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = +\infty$

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

Quelques rappels :

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Suites extraites convergentes

⇒ Méthodes

Quelques rappels :

- ▶ Valeur d'adhérence d'une suite

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Suites extraites convergentes

⇒ Méthodes

Quelques rappels :

- ▶ Valeur d'adhérence d'une suite
- ▶ Si (u_n) converge, elle n'admet qu'une valeur d'adhérence.
- ▶ Savoir-faire : démontrer la non convergence (contraposée).

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Exercice

On considère une suite réelle (u_n) telle que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Suites monotones

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$
).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration

Corollaire - Version décroissante

Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente (et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$$
).
2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- ▶ les deux suites sont monotones de sens contraire ;
- ▶ la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Suites adjacentes

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- ▶ les deux suites sont monotones de sens contraire ;
- ▶ la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème - Convergence pour suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration

Exercice

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Exercice

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Savoir-faire. Montrer la convergence avec deux sous-suites adjacentes

Il arrive souvent que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes (dans ce cas il faut le démontrer), on en déduit alors la convergence de (u_n) d'après le critère de convergence par suites extraites totales. C'est le cas :

- ▶ si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et $|f'| < 1$
- ▶ si $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ avec $(u_k) \searrow 0$ (critère de Leibniz). . .

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Objectifs

⇒ Méthodes

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Objectifs

⇒ Méthodes

- ▶ Encadrement

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

- ▶ Encadrement
- ▶ Suites extraites

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

- ▶ Encadrement
- ▶ Suites extraites
- ▶ Suite monotone (et bornée)

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Méthodes

- ▶ Encadrement
- ▶ Suites extraites
- ▶ Suite monotone (et bornée)
- ▶ Suites adjacentes

⇒ Méthodes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

⇒ Méthodes

Objectifs

⇒ Méthodes

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 18 - Suites numériques
5. Analyse asymptotique
- ▶ Exercices N°357 & 359
- ▶ TD de jeudi :
8h-10h : 362, 369, 371, 373, 379
10h-12h : 363, 370, 372, 375, 383

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

4.1. Suites convergentes

4.2. Valeur d'adhérence d'une suite

4.3. Suites divergentes

4.4. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

4.5. Extension aux suites complexes

4.6. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites