

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples

3. Suites extraites

3. Extraction

4. Limite d'une suite réelle

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples

3. Suites extraites

3. Extraction

4. Limite d'une suite réelle

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte...

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte...

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte...

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, u_n = o(\lambda) \text{ ssi } (u_n) \rightarrow 0$$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

Remarque Autant en emporte...

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Définition - Suites négligeables

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$

On note alors $u_n = o(v_n)$ (lu u_n est un petit o de v_n) ou parfois $(u_n) \ll (v_n)$.

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, u_n = o(\lambda) \text{ ssi } (u_n) \rightarrow 0$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Nulle infiniment souvent

Définition - Suites infiniment souvent nulles

Soit (u_n) une suite numérique. On note

$$\mathcal{Z}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\} = u^{-1}(\{0\}).$$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Nulle infiniment souvent

Définition - Suites infiniment souvent nulles

Soit (u_n) une suite numérique. On note

$$\mathcal{I}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 0\} = u^{-1}(\{0\}).$$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Attention. Cas d'étude

- Si $\mathcal{I}_u$ est fini, alors (u_n) n'est jamais nulle à partir d'un certain rang. C'est pratique.

Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{I}_u \cap [n_0, +\infty[= \emptyset$.

- Si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Cela n'est pas intéressant.

Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\llbracket n_0, +\infty \rrbracket \subset \mathcal{I}_u$.

Cela correspond à la situation où le complémentaire de $\mathcal{I}_u$ est fini.

- Le cas pénible : $\mathcal{I}_u$ est infini mais pas de la forme contenant $\llbracket n_0, +\infty \rrbracket$.

$\mathcal{I}_u$ et son complémentaire sont infinis

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{I}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{I}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Négligeabilité

Proposition - Négligeabilité avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{I}_v} \frac{u_n}{v_n} = 0, \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir-faire. $u_n = o(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$u_n = o(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x , on n'a jamais $x \mathcal{R} x$).

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x , on n'a jamais $x \mathcal{R} x$).

Démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'ordre strict

$o()$ ou $\ll$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble des suites non (totalement) nulles à partir d'un certain rang : elle est transitive et antiréflexive (pour tout x , on n'a jamais $x \mathcal{R} x$).

Démonstration

Remarque Notations

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Croissance comparée

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Il s'agit simplement d'écrire avec la nouvelle notation des résultats déjà connus sur les fonctions de référence.

Proposition - Croissance comparée

Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < p < q$, $a > 1$, on a

$$((\ln n)^\beta) \ll (n^\alpha), (n^p) \ll (n^q), (n^\alpha) \ll (a^n), (a^n) \ll (n!)$$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples

3. Suites extraites

3. Extraction

4. Limite d'une suite réelle

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$

On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$

On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Proposition - Equivalence avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) \sim (v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{I}_v} \frac{u_n}{v_n} = 1, \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

- 1. Problèmes
- 2. Exemples
- 3. Extraction
- 4. Limites
- 5. Analyse asymptotique
 - 5.1. Hiérarchie de $\mathcal{O}$
 - 5.2. Suites équivalentes**
 - 5.3. Suites dominées

Définition et critère d'application

On cherche à définir ce que pourrait être deux suites égales à l'infini.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Définition - Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si $u_n - v_n = o(v_n)$

On note alors $(u_n) \sim (v_n)$ (lu u_n est équivalente à v_n).

Proposition - Equivalence avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) \sim (v_n) \iff \lim_{n \notin \mathcal{I}_v} \frac{u_n}{v_n} = 1, \text{ et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

Démonstration

- 5.1. Hiérarchie de suites
- 5.2. Suites équivalentes
- 5.3. Suites dominées

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !), } u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \rightarrow \lambda$$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !), } u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \rightarrow \lambda$$

Démonstration

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Comparaison à une suite constante

Si v_n est constante (différente de 0) et donc jamais nulle

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Comparaison à une constante

Soit (u_n) une suite numérique.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ (non nul !), } u_n \sim \lambda \text{ ssi } (u_n) \rightarrow \lambda$$

Démonstration

On a un critère (savoir-faire) assez simple lorsque (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang.

Savoir-faire. $(u_n) \sim (v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes :

$$(u_n) \sim (v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \longrightarrow 1$$

- 1. Problèmes
- 2. Exemples
- 3. Extraction
- 4. Limites
- 5. Analyse asymptotique
 - 5.1. Hiérarchie de $\mathcal{O}$
 - 5.2. Suites équivalentes
 - 5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Relation d'équivalence

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation d'équivalence

$\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

Démonstration

Exercice

Refaire la démonstration en exploitant le savoir-faire précédent dans le cas où les suites sont non nulles à partir d'un certain rang.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Proposition - Equivalences classiques

On a les comparaisons classiques suivantes :

$n^2 = o(n^3)$ et plus généralement $n^p = o(n^q)$ pour $0 < p < q$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ formule de Stirling}$$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

- 1. Problèmes
- 2. Exemples
- 3. Extraction
- 4. Limites
- 5. Analyse asymptotique
 - 5.1. Hiérarchie de $\mathcal{O}$
 - 5.2. Suites équivalentes**
 - 5.3. Suites dominées

Suites équivalentes

Analyse Equivalence en action

Heuristique. Objectif premier

Dans de nombreuses situations, trouver un équivalent signifie trouver une expression fermée, analytique notée v_n (dépendant de n) et permettant de remplacer (car très proche) u_n et avantageusement (car plus simple à calculer).

Proposition - Equivalences classiques

On a les comparaisons classiques suivantes :

$$n^2 = o(n^3) \text{ et plus généralement } n^p = o(n^q) \text{ pour } 0 < p < q$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ formule de Stirling}$$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Démonstration

Exercice

Exercice

$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$. Nous allons essayer de trouver un équivalent de série, pour avoir des idées pour trouver un équivalent de $n!$.

1.

1.1 Montrer que $1 \leq \sum_{k=1}^n \ln(k) - n \ln n - n \leq n \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln(n+1)$

1.2 En déduire $\ln(n!) \sim n \ln n - n$.

On peut supposer que $n! = K_n \times n^n \times e^{-n}$, avec $\ln(K_n) = o(n \ln n)$.

1.3 Montrer que la fonction logarithme est concave. Calculer l'équation de la tangente à $y = \ln(x)$ en $x = k$.

1.4 En déduire que pour tout $x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$, $\ln(x) \leq \frac{1}{k}(x - k) + \ln k$ (on pourra faire un dessin).

1.5 Montrer alors que $\ln k \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t dt$ (point milieu).

Puis que $\ln(n!) \geq \ln(n^n \sqrt{n} e^{-n} \sqrt{2})$

1.6 On note $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$.

Montrer que (u_n) est décroissante, puis convergente, on note K la limite de (u_n) .

1.7 Donner un équivalent de $n!$ exploitant K .

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Exercice

$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$. Nous allons essayer de trouver un équivalent de série, pour avoir des idées pour trouver un équivalent de $n!$.

- 1.
2. Intégrale de Wallis.

On définit les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ pour compléter le résultat précédent (i.e. trouver la valeur de la constante).

- 2.1 Calculer W_0 et W_1 .
- 2.2 Donner relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n .
- 2.3 En déduire une expression de W_{2n} et de W_{2n+1} en utilisant les factorielles.
- 2.4 Par ailleurs, montrer que W_n et W_{n+1} sont équivalentes.
- 2.5 En déduire la formule de Stirling (i.e. la valeur de K), en supposant que $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n) , alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n) , alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n) , alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers 0...

...et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n) , alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers 0...

...et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Théorème - Equivalents et limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- ▶ Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$;
- ▶ Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Calculer avec des relations d'équivalence

Théorème - Signe d'une suite

Si la suite (u_n) est équivalente à (v_n) , alors à partir d'un certain rang, les deux suites sont de même signe (strict).

Démonstration

Attention. Evidemment si (u_n) tend vers 0...

...et que le signe de (u_n) n'est jamais stabilisé ; on ne peut rien dire

Théorème - Equivalents et limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- ▶ Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$;
- ▶ Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

Démonstration

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.

Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.

Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Théorème - Opérations sur les équivalents

Soient $(u_n), (v_n), (x_n), (y_n)$ telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Alors

- ▶ $u_n v_n \sim x_n y_n$;
- ▶ si (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{x_n}{y_n}$;
- ▶ si les suites sont à valeurs strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim x_n^\alpha$.

Attention !

Attention. Equivalence à 0

Ne pas écrire $u_n \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la première définition et avec celle qui suit cela signifie que (u_n) est nulle à partir d'un certain rang (ce qui est bien rare...), usuellement ce genre d'écriture provient d'une somme (ou d'une soustraction) d'équivalents, ce qui n'est pas autorisé.

Ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Théorème - Opérations sur les équivalents

Soient $(u_n), (v_n), (x_n), (y_n)$ telles que $u_n \sim x_n$ et $v_n \sim y_n$. Alors

- ▶ $u_n v_n \sim x_n y_n$;
- ▶ si (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{x_n}{y_n}$;
- ▶ si les suites sont à valeurs strictement positives et $\alpha \in \mathbb{R}$
alors $u_n^\alpha \sim x_n^\alpha$.

Exercice A démontrer.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Heuristique. Recherche des équivalents

Déterminer un équivalent d'une suite consiste à chercher un équivalent écrit comme produit ou quotient de suites de références (n^α , a^n , $(\ln(n))^\beta$, $n!$...) a priori sans somme (dans une somme, l'un des termes est négligeable devant l'autre et s'enlève de l'équivalent) en laissant les constantes multiplicatives (si on les supprime, la limite du quotient ne sera plus 1). Par exemple :

$$2(n^3 + n) \sim \quad ; \frac{\pi}{2n+1} \sim \quad ; e^{n^3+n+1/n} \sim \quad ; \ln(3n^5 + n + 2) \sim \quad .$$

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Heuristique. Recherche des équivalents

Déterminer un équivalent d'une suite consiste à chercher un équivalent écrit comme produit ou quotient de suites de références (n^α , a^n , $(\ln(n))^\beta$, $n!$...) a priori sans somme (dans une somme, l'un des termes est négligeable devant l'autre et s'enlève de l'équivalent) en laissant les constantes multiplicatives (si on les supprime, la limite du quotient ne sera plus 1). Par exemple :

$$2(n^3 + n) \sim \quad ; \frac{\pi}{2n+1} \sim \quad ; e^{n^3+n+1/n} \sim \quad ; \ln(3n^5 + n + 2) \sim \quad .$$

Exemple Problème d'addition...

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

Savoir-faire. Comment faire si on veut additionner des équivalents ?

Dans ces cas-là, et dans toute opération un peu compliquée, on remplace $u_n \sim v_n$ par $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + \epsilon_n)$ avec $\epsilon_n \rightarrow 0$,

comme il s'agit d'égalités (LA VRAIE !), on peut alors faire des opérations.

L'enjeu : que les parties principales ne disparaissent pas comparativement à la suite de domination.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Exemples fondamentaux

2. Exemples

3. Suites extraites

3. Extraction

4. Limite d'une suite réelle

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition - Suite dominée

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq C|v_n|.$$

On note $(u_n) = O((v_n))$ qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».

On dit aussi parfois que (v_n) est prépondérante à (ou domine) (u_n) .

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Définition

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Mais pour le calcul asymptotique, le notation vraiment pratique est la suivante. C'est avec elle que l'on fera les calculs.

Définition - Suite dominée

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes).

On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq C|v_n|.$$

On note $(u_n) = O((v_n))$ qui se lit « u_n est un grand O de v_n ».

On dit aussi parfois que (v_n) est prépondérante à (ou domine) (u_n) .

Exemple Relations avec les notations précédentes

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathcal{I}_v} \text{ bornée, et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathcal{I}_v} \text{ bornée, et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Exercice

Faire la démonstration

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathcal{I}_v} \text{ bornée, et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Exercice

Faire la démonstration

Savoir-faire. $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) :

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \text{ est bornée}$$

Expression avec la limite

Proposition - Domination avec la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Alors

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right)_{n \in \mathcal{I}_v} \text{ bornée, et } \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathcal{I}_v \cap [N, +\infty[\subset \mathcal{I}_u$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Exercice

Faire la démonstration

Savoir-faire. $u_n = O(v_n)$ avec la notation des limites

Si v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors on utilise l'une des deux implications suivantes ($\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$) :

$$(u_n) = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n} \right) \text{ est bornée}$$

Propotion Implication sur les limites



Relation de préordre

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Exercice

Faire la démonstration

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

O est une relation de préordre (réflexive et transitive) sur l'ensemble des suites numériques.

Exercice

Faire la démonstration

Remarque La relation d'équivalence naturelle à associer à $O(\cdot)$

Manipuler $O(\cdot)$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela signifie que le n -ième nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0,577\,215\,664\,9$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Manipuler $O(\cdot)$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela signifie que le n -ième nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0,577\,215\,664\,9$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Remarque Addition, multiplication

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Manipuler $O(\cdot)$

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Heuristique. Une première formule commentée

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On a alors $H_n = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Cela signifie que le n -ième nombre harmonique est égal à $\ln n$ additionné de la constante $\gamma \approx 0,577\,215\,664\,9$ d'Euler et d'un terme d'une autre suite, inconnue, mais dont on sait que divisé par $\frac{1}{n}$ (c'est-à-dire multiplié par n) elle reste bornée ou encore une suite que ne dépasse pas un nombre constant de fois $\frac{1}{n}$.

Remarque Addition, multiplication

Analyse Que signifie $O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Lorsque vous rencontrer $O(a_n)$ (avec (a_n) non nulle à partir d'un certain rang), vous pouvez le remplacer par $(u_n) = (a_n \times \epsilon_n)$ avec ϵ_n bornée.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Deux petites remarques au passage

Avant de passer aux théorèmes et démonstrations, deux petites remarques complémentaires :

Truc & Astuce pour le calcul - Pour manipuler une opération avec $O(a_n)$

Lorsque vous rencontrez $O(a_n)$ (avec (a_n) non nulle à partir d'un certain rang), vous pouvez le remplacer par $(u_n) = (a_n \times \epsilon_n)$ avec ϵ_n bornée.

Attention. Rappel : il ne s'agit pas d'une relation d'équivalence

Rappelons que même s'il y a une égalité : il n'y a pas de symétrie. On a $O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$, mais on n'a pas $O(\frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$. Toute suite dominée par $(\frac{1}{n^2})$ est dominée par $\frac{1}{n}$ mais la réciproque est fautive.

Ce symbole $= O()$ est plutôt à voir comme une relation d'ordre, voir une inclusion d'ensemble. L'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n^2})$ est inclus dans l'ensemble des suites dominées par $(\frac{1}{n})$.

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées



Proposition - Opérations entre les relations

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ quatre suites réelles.

- ▶ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
- ▶ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- ▶ Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = O(u_n) \Leftrightarrow w_n = O(v_n)$.
- ▶ Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
Autrement écrit : $O(w_n) + O(w_n) = O(w_n)$
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$
Autrement écrit : $\lambda \times O(v_n) = O(v_n)$
- ▶ Si u_n et v_n ne s'annulent pas et $u_n = O(v_n)$ alors $\frac{1}{v_n} = O(\frac{1}{u_n})$.
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$ et alors $u_n \times x_n = O(v_n \times x_n)$.
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n \times w_n = O(v_n \times x_n)$.
- ▶ Si les termes u_n et v_n sont > 0 avec $u_n = O(v_n)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées



Proposition - Opérations entre les relations

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (x_n)$ quatre suites réelles.

- ▶ Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$
- ▶ Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- ▶ Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n = O(u_n) \Leftrightarrow w_n = O(v_n)$.
- ▶ Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
Autrement écrit : $O(w_n) + O(w_n) = O(w_n)$
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$
Autrement écrit : $\lambda \times O(v_n) = O(v_n)$
- ▶ Si u_n et v_n ne s'annulent pas et $u_n = O(v_n)$ alors $\frac{1}{v_n} = O(\frac{1}{u_n})$.
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$ et alors $u_n \times x_n = O(v_n \times x_n)$.
- ▶ Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(x_n)$ alors $u_n \times w_n = O(v_n \times x_n)$.
- ▶ Si les termes u_n et v_n sont > 0 avec $u_n = O(v_n)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $u_n^\alpha = O(v_n^\alpha)$.

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées



Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Comparaison logarithmique

Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

Corollaire - Demi-critère de D'Alembert

Soit (u_n) est une suite à termes positifs, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 1 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Comparaison logarithmique

Proposition - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Alors $u_n = O(v_n)$.

Corollaire - Demi-critère de D'Alembert

Soit (u_n) est une suite à termes positifs, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 1 \implies u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Conclusion

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

► Définitions : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ et $u_n = O(v_n)$.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Conclusion

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

- ▶ Définitions : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ et $u_n = O(v_n)$.
- ▶ Critères pratiques lorsque (v_n) (et (u_n)) n'est pas infiniment souvent nulle.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Conclusion

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

- ▶ Définitions : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ et $u_n = O(v_n)$.
- ▶ Critères pratiques lorsque (v_n) (et (u_n)) n'est pas infiniment souvent nulle.
- ▶ Opérations algébriques et relation asymptotique.

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

Conclusion

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

- ▶ Définitions : $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$ et $u_n = O(v_n)$.
- ▶ Critères pratiques lorsque (v_n) (et (u_n)) n'est pas infiniment souvent nulle.
- ▶ Opérations algébriques et relation asymptotique.
- ▶ Des équivalents spectaculaires : série harmonique et formule de Stirling

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées

⇒ Comparaison
(asymptotique) entre
les suites

Objectifs

⇒ Comparaison (asymptotique) entre les suites

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 12 - Groupes
- ▶ Exercices N°376 & 377
- ▶ Pour mardi 2 décembre :
Activités - Suites classiques

1. Problèmes

2. Exemples

3. Extraction

4. Limites

5. Analyse
asymptotique

5.1. Hiérarchie de suites

5.2. Suites équivalentes

5.3. Suites dominées