Leçon 32 - Construction d'ensembles numériques

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

1. Problèmes

2. Nombres algébriques
    2.1. Nombres entiers
    2.2. Nombres rationnels
    2.3. Nombres algébriques

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

1. Problèmes

2. Nombres algébriques
2.1. Nombres entiers
2.2. Nombres rationnels
2.3. Nombres algébriques

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problème Construction des réels (2)

Problèmes

Problème Construction des entiers naturels

Problème Construction des entiers relatifs, des rationnels

Problème Construction des réels (1)

Problème Construction des réels (2)

Problème Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

⇒ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

2.1. Nombres entiers

2.2. Nombres rationnels

2.3. Nombres algébriques

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Nombres entiers naturels

On commence par admettre la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Heuristique. Nombres entiers naturels

La construction suivante est dûe à Péano. Soit E un ensemble non vide, possédant un élément de référence et dont tous les éléments ont un unique successeur (différent de l'élément de référence).
Cet élément de référence se note 0 (ou 1, selon). Puis on définit l'addition $+1$ comme le passage d'un nombre à son successeur.
On a ainsi les bases pour un raisonnement par récurrence et l'ensemble des entiers.
Ce qui suit est en fait assez naturel, même si cela peut paraître un peu compliqué la première fois qu'on le voit...

Nombres entiers naturels. PEANO

Théorème - Construction de PÉANO

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective $(s(a) = s(a') \Rightarrow a = a')$

Nombres entiers naturels. PEANO

Théorème - Construction de PÉANO

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ non vide, munie d'une loi s (comme successeur) telle que :

- $\mathbb{N}$ étant non vide, il admet une élément premier noté 0.
- Pour tout élément $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = s(a)$.
- s est injective $(s(a) = s(a') \Rightarrow a = a')$

Remarque Addition $+1$

Nombres entiers naturels. PEANO

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a+b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.

On a $a+b = b+a$.

La multiplication est alors la répétition de l'addition :

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$$

On a $a \times b = b \times a$.

Nombres entiers naturels. PEANO

Proposition - Opérations sur $\mathbb{N}$

On définit l'addition sur $\mathbb{N}$ par : $a+b = s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$.

On a $a+b = b+a$.

La multiplication est alors la répétition de l'addition :

$$a \times b = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ fois}}$$

On a $a \times b = b \times a$.

Proposition - Relation d'ordre

$\mathbb{N}$ est naturellement ordonné (récursivement) :

$$\forall\ a \in \mathbb{N}, 0 \leqslant a \qquad \text{et} \qquad a \leqslant b \Longleftrightarrow s^{-1}(a) = s^{-1}(b)$$

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Python - Ordre

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    while c>0 and d>0 :
        c,d=c-1,d-1
    if c==0:
        return(a)
    else :
        return(b)
```

Relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Il existe un algorithme qui termine, permettant de connaître le plus petit entre a et b.

Python - Ordre

```python
def petit(a,b):
    c,d=a,b
    if c==0 :
        return(a)
    elif d==0 :
        return(b)
    else :
        petit(c-1,d-1)
```

Nombres entiers naturels

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Nombres entiers naturels

Ensuite on construit l'ensemble des entiers relatifs. On propose ici un exercice.

Heuristique - Problématique

La problématique : l'addition à trou (ou recherche d'une opération réciproque) n'est qu'à moitié possible. En effet, elle dépend de la relation d'ordre entre les nombres soustraits.
Il faut donc créer un premier ensemble, afin que toute soustraction de nombres entiers soit possible.
Mais certaines soustractions peuvent conduire à un « même »résultat

Nombres entiers naturels

Exercice

Sur $\mathbb{N}^2$,

1. Montrer que $\sim_1$ définie par :

$$(a,b) \sim_1 (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+d=c+b$$

   est une relation d'équivalence.
2. Montrer que tout couple (a,b) est dans la classe d'un couple $(0,d)$ ou $(d,0)$ selon que $a \leqslant b$ ou $a \geqslant b$
3. En déduire la construction de $\mathbb{Z}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\frac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).

On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$

L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$

La multiplication est plus compliquée :

$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$

Nombres entiers naturels

Exemple Le nombre -2

Proposition - Opération sur $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ de la loi $\sim_1$).

On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a+d \leqslant_{\mathbb{N}} c+b$$

L'addition est alors simplement : $\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}$

La multiplication est plus compliquée :

$$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \times_{\mathbb{N}} d, b \times_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} a \times_{\mathbb{N}} d)}$$

Remarque La difficulté : l'indépendance au représentant

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Démonstration

Nombres entiers naturels

Exemple Multiplication

Démonstration

Exercice

Montrer que l'ordre est total.

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Construction de $\mathbb{Q}$

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Construction de $\mathbb{Q}$

La construction de $\mathbb{Q}$ est en tout point équivalente à la construction de $\mathbb{Z}$, mais pour un problème lié à la multiplication (et donc division) au lieu de l'addition (et donc la multiplication).

Exercice

Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

1. Montrer que $\sim_2$ définie par :
$$(a,b) \sim_2 (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a \times_{\mathbb{Z}} d = c \times_{\mathbb{Z}} b$$
est une relation d'équivalence.
2. Montrer la construction de $\mathbb{Q}$ comme équivalent à l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$
3. Montrer que $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ définie par $(a,b) \leqslant_{\mathbb{Q}} (c,d)$ ssi $a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c$ définie bien une relation d'ordre total sur $\mathbb{Q}$
4. Comment définir $+_{\mathbb{Q}}$ et $\times_{\mathbb{Q}}$

Corps $\mathbb{Q}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés...

Corps $\mathbb{Q}$

Il faudrait vérifier que $\mathbb{Q}$ est bien un corps (addition, multiplication inversible) compatible avec $\leqslant_Q$. Cela se fait sans grande difficultés…

Proposition - Opération sur $\mathbb{Q}$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}{\sim_2}$ (des classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ de la loi $\sim_2$).
On définit alors la relation d'ordre $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ par :

$$\overline{(a,b)} \leqslant_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \Longleftrightarrow a \times_{\mathbb{Z}} d \leqslant_{\mathbb{Z}} c \times_{\mathbb{Z}} b$$

La multiplication est alors simplement :
$\overline{(a,b)} \times_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d)}$ L'addition est plus compliquée :
$\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(a \times_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \times_{\mathbb{Z}} c, b \times_{\mathbb{Z}} d)}$
L'ordre est total (démonstration comme pour $\leqslant_{\mathbb{Z}}$).

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$ et fonctions associées

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple Nombres rationnels

Nombre par équation

La plupart du temps les nombres se définissent par une phrase, qui elle même se traduit en une équation (polynomiale).
On définit alors

Défintion - Nombre algébrique

Un nombre r est un nombre algébrique si il existe une fonction polynomiale P à coefficients entiers telle que $P(r) = 0$.
Si n est le plus petit degré d'un polynôme vérifiant cette relation, on dit que r est algébrique d'ordre n

Exemple Nombres rationnels
Exemple Nombres quadratiques

Nombres transcendants

D'autres nombres, toujours « naturels »ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Nombres transcendants

D'autres nombres, toujours « naturels »ne s'expriment pas à partir d'une équation polynomiale à coefficients entiers. C'est le cas de π ou de e.

Définition - Nombre transcendant

Si r n'est pas algébrique, on dit qu'il est transcendant.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d=b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d=b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a\times d = b\times c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

- $\mathbb{N}$ est défini par l'existence de 0 d'un successeur.
  Cela donne l'addition $+1$ (la récurrence) et la relation d'ordre
- Puis, on définit l'addition répétée et la multiplication...
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{N}^2}{\sim_1}$ où $(a,b) \sim_1 (c,d)$ ssi $a+d = b+c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Ensuite : $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}{\sim_2}$ où $(a,b) \sim_2 (c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$.
  La relation $\leqslant$, l'addition et la multiplication se généralise
- Nombres algébriques : racines de polynôme à coefficients entiers.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et ++

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 9
  3. Construction de $\mathbb{R}$
- Exercices N°291, 292