



Leçon 33 - Construction d'ensembles numériques

Leçon 33 - Construction d'ensembles numériques

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Heuristique. Un ensemble ordonné, sans trou

La bonne idée : il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, sans trou. Le schéma mental associé est donc celle de la ligne droite orientée (avec une origine et un sens).

Le théorème clé sur le nombre réel est alors le théorème des valeurs intermédiaires, vus en classe de seconde.

Pour « démontrer » ce théorème, une excellente idée est d'exploiter la dichotomie, que nous appellerons, selon la tradition mathématiques, la bisection. Nous construirons $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et de cette méthode algorithmique de bisection.

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

On considère $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leq_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{Q}$.

Définition - Suites bisseccantes de rationnels

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de rationnels.

On dit que le couple $((a_n), (b_n))$ forme un couple de suites (de rationnels) bisseccantes si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \text{ et } b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)

2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_n$

La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et (b_n) majore (a_n)

3. $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bisseccantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

On considère $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leq_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{Q}$.

Définition - Suites bisseccantes de rationnels

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de rationnels.

On dit que le couple $((a_n), (b_n))$ forme un couple de suites (de rationnels) bisseccantes si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ et $b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_n$
La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et (b_n) majore (a_n)
3. $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Exemple Dichotomie et $\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bisseccantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

On considère $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leq_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{Q}$.

Définition - Suites bissecentes de rationnels

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de rationnels.

On dit que le couple $((a_n), (b_n))$ forme un couple de suites (de rationnels) bissecentes si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ et $b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} b_n$
La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et (b_n) majore (a_n)
3. $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$

Exemple Dichotomie et $\sqrt{2}$

Démonstration (la majoration)

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecentes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Par récurrence :

Proposition - Ecart tendant vers 0

Soit $((a_n), (b_n))$ un couple de suites bissecantes.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} (b_0 - a_0)$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Par récurrence :

Proposition - Ecart tendant vers 0

Soit $((a_n), (b_n))$ un couple de suites bissecantes.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} (b_0 - a_0)$

Heuristique. $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Et « quotientage »

Nous savons que cet exemple nous donne deux suites qui convergent vers $\sqrt{2}$, qui n'est pas rationnels (alors qu'il s'agit bien de suite de rationnels).

Nous cherchons à définir les nombres réels comme limite de telles suites. Mais un nombre réel peut être limite de deux couples de bissecantes distincts. Nous allons donc devoir quotienter, c'est-à-dire reconnaître comme égales deux suites qui conduisent au même nombre.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Avant cela commençons par un lemme.

Lemme -

Considérons quatre suites de rationnels (a_n) , (c_n) , (d_n) et (f_n) telles que (a_n) est croissante, (f_n) décroissante et $((c_n), (d_n))$ un couple de bissecantes.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq_{\mathbb{Q}} d_n$ et $c_n \leq_{\mathbb{Q}} f_n$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq_{\mathbb{Q}} f_n$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Avant cela commençons par un lemme.

Lemme -

Considérons quatre suites de rationnels (a_n) , (c_n) , (d_n) et (f_n) telles que (a_n) est croissante, (f_n) décroissante et $((c_n), (d_n))$ un couple de bissecantes.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq_{\mathbb{Q}} d_n$ et $c_n \leq_{\mathbb{Q}} f_n$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq_{\mathbb{Q}} f_n$

Démonstration

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

A partir de ce lemme, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de la relation d'équivalence suivante

Définition - Relation d'ordre sur les couples de bissecantes

On considère deux couples de suites bissecantes $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$. On dit que $((a_n), (b_n))$ est similaire à $((c_n), (d_n))$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq_{\mathbb{Q}} b_n \text{ et } a_n \leq_{\mathbb{Q}} d_n$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

On dira par la suite que $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$ définissent le même réel.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

A partir de ce lemme, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de la relation d'équivalence suivante

Définition - Relation d'ordre sur les couples de bissecantes

On considère deux couples de suites bissecantes $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$. On dit que $((a_n), (b_n))$ est similaire à $((c_n), (d_n))$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq_{\mathbb{Q}} b_n \text{ et } a_n \leq_{\mathbb{Q}} d_n$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

On dira par la suite que $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$ définissent le même réel.

Démonstration

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Définition - Ensemble $\mathbb{R}$

On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des classes de similarité définies sur l'ensemble des couples de bissecantes :

$$x \in \mathbb{R} \iff \exists ((a_n), (b_n)) \text{ bissecantes tel que } x = \overline{((a_n), (b_n))}$$

On notera $x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right\}$ ou encore $\begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} x$.

Il sera donc toujours sous-entendu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

Définition - Ensemble $\mathbb{R}$

On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des classes de similarité définies sur l'ensemble des couples de bissecantes :

$$x \in \mathbb{R} \iff \exists ((a_n), (b_n)) \text{ bissecantes tel que } x = \overline{((a_n), (b_n))}$$

On notera $x = \begin{cases} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{cases}$ ou encore $\begin{matrix} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{matrix} x$.

Il sera donc toujours sous-entendu que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Savoir-faire. Manipuler des nombres réels

On peut donc écrire :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(a_n), (b_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \leq b_n \text{ (avec } 0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(b_n - a_n)).$$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Relation d'ordre

Il reste à placer géométriquement x . . . Pour cela on exploite la relation d'ordre :

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Il reste à placer géométriquement x . . . Pour cela on exploite la relation d'ordre :

Définition - Relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$

On considère deux nombres de $\mathbb{R}$, x et y .

On dit que x est inférieur à y , noté $x \leq y$, si

$$\forall \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} x \text{ et } \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} y, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq_Q d_n.$$

Il s'agit d'une relation d'ordre.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Relation d'ordre

Il reste à placer géométriquement x . . . Pour cela on exploite la relation d'ordre :

Définition - Relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}$

On considère deux nombres de $\mathbb{R}$, x et y .

On dit que x est inférieur à y , noté $x \leq y$, si

$$\forall \begin{array}{c} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} x \text{ et } \begin{array}{c} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} y, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq_Q d_n.$$

Il s'agit d'une relation d'ordre.

Démonstration

Proposition - Ordre total

C'est une relation d'ordre total. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, ou bien $x \leq y$ ou bien $y \leq x$.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Heuristique. Extension du cas rationnel

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \overline{\left((x), \left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right)} \in \mathbb{R}$. Donc d'une certaine façon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Puis si $x \leq_{\mathbb{Q}} y$, alors $x \leq y$.

Donc la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$, prolonge cela définie sur $\mathbb{Q}$.

On peut donc garder la même représentation en passant de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.

C'est la représentation d'une droite pointillée qui devient ligne continue.

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

En fait, l'évolution précise de la taille des suites d'intervalle $([a_n, b_n])$ ne joue pas un rôle important (le $\frac{1}{2}$ de la définition). Et même la nature des points a_n et b_n importe peu (nombres rationnels ou nombres irrationnels).

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

En fait, l'évolution précise de la taille des suites d'intervalle $([a_n, b_n])$ ne joue pas un rôle important (le $\frac{1}{2}$ de la définition). Et même la nature des points a_n et b_n importe peu (nombres rationnels ou nombres irrationnels).

Théorème - Segments emboîtés rationnels

Si $([a_n, b_n])$ est une suite de segments emboîtés de $\mathbb{Q}$,
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$,
et de longueur qui tend vers 0 :

i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tq $(\forall p \in \mathbb{N}) :$

$$0 \leq b_{m+p} - a_{m+p} \leq b_m - a_m \leq \epsilon.$$

Alors $\exists ! x \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x \leq b_n$, noté : $x \in [a_n, b_n]$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Heuristique. Principe de la démonstration

On considère une suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ emboîtés rationnels qui tend vers 0.

Nous allons extraire des suites (a_n) et (b_n) deux suites appelées (A_n) et (B_n) bissecantes.

Le réel x définie par ces suites sera le nombre recherché. Il est unique : si on en considère un second, associée à des suites de bissecantes. On montre qu'elles sont similaires à $((A_n), (B_n))$ en exploitant le fait que ces dernières sont extraites de (a_n) et (b_n)

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Heuristique. Principe de la démonstration

On considère une suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ emboîtés rationnels qui tend vers 0.

Nous allons extraire des suites (a_n) et (b_n) deux suites appelées (A_n) et (B_n) bissecantes.

Le réel x définie par ces suites sera le nombre recherché. Il est unique : si on en considère un second, associée à des suites de bissecantes. On montre qu'elles sont similaires à $((A_n), (B_n))$ en exploitant le fait que ces dernières sont extraites de (a_n) et (b_n)

Démonstration

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : addition

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques ?

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : addition

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques ?

Définition - Addition sur $\mathbb{R}$

Si $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$ sont deux suites bissecantes.

Alors $((a_n + c_n), (b_n + d_n))$ est également bissecante.

On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$:

$$x + y = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (b_n + d_n) \searrow \\ (a_n + c_n) \nearrow \end{array} \right\}$$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : addition

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques ?

Définition - Addition sur $\mathbb{R}$

Si $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$ sont deux suites bissecantes.

Alors $((a_n + c_n), (b_n + d_n))$ est également bissecante.

On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$:

$$x + y = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (b_n + d_n) \searrow \\ (a_n + c_n) \nearrow \end{array} \right\}$$

On étend la soustraction par addition avec un nombre négatif.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : addition

La relation d'ordre est donc prolongée. Qu'en est-il des opérations algébriques ?

Définition - Addition sur $\mathbb{R}$

Si $((a_n), (b_n))$ et $((c_n), (d_n))$ sont deux suites bissecantes.

Alors $((a_n + c_n), (b_n + d_n))$ est également bissecante.

On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$:

$$x + y = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (b_n + d_n) \searrow \\ (a_n + c_n) \nearrow \end{array} \right\}$$

On étend la soustraction par addition avec un nombre négatif.

Démonstration

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : multiplication

Concernant la multiplication, on exploite les segments emboîtés.
Mais on est obligé de procéder en plusieurs temps (selon le signe
du nombre) pour définition :

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : multiplication

Concernant la multiplication, on exploite les segments emboîtés.
Mais on est obligé de procéder en plusieurs temps (selon le signe du nombre) pour définition :

Définition - Multiplication sur $\mathbb{R}$

Produit sur $\mathbb{R}_+$.

Si $0 \leq x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right\}$ et $0 \leq y = \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right\}$. Alors la suite

$([a_n c_n, b_n d_n])$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.

Il existe un unique réel dans chaque $[a_n c_n, b_n d_n]$, il s'agit de $x \times y$.

Si $x < 0$ ou $y < 0$, alors on considère les suites opposées. . .

Exercice

A démontrer

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : inversion

Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : inversion

Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

Définition - Inverse sur $\mathbb{R}$

Inverse sur $\mathbb{R}_+$.

Si $0 \leq x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$ et $x \neq 0$.

On peut supposer que $a_n > 0$, à partir d'un certain rang. SPDG, on suppose que ce rang est $n_0 = 0$.

Alors la suite $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n} \right] \right)$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.

Il existe un unique réel dans chaque $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n} \right] \right)$, il s'agit du nombre $\frac{1}{x}$.

Si $x \leq 0$ et $x \neq 0$, on prend l'opposée de l'inverse de l'opposé de $x \dots$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Opérations algébriques : inversion

Tout élément non nul est inversible, en exploitant l'inversion sur $\mathbb{Q}$

Définition - Inverse sur $\mathbb{R}$

Inverse sur $\mathbb{R}_+$.

Si $0 \leq x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$ et $x \neq 0$.

On peut supposer que $a_n > 0$, à partir d'un certain rang. SPDG, on suppose que ce rang est $n_0 = 0$.

Alors la suite $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n} \right] \right)$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.

Il existe un unique réel dans chaque $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n} \right] \right)$, il s'agit du nombre $\frac{1}{x}$.

Si $x \leq 0$ et $x \neq 0$, on prend l'opposée de l'inverse de l'opposé de $x \dots$

Exercice

A démontrer

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Compatibilité opératoire avec $\leq$

On admet les deux premières propositions suivantes. Elles découlent de la construction de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

Compatibilité opératoire avec $\leq$

On admet les deux premières propositions suivantes. Elles découlent de la construction de $\mathbb{R}$.

Proposition - Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations usuelles

La relation d'ordre usuelle $\leq$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:

$$\begin{aligned}\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y &\implies x + z \leq y + z \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \underline{\mathbb{R}_+}, \quad x \leq y &\implies xz \leq yz\end{aligned}$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

Compatibilité opératoire avec $\leq$

On en déduit les règles classiques sur la manipulation des inégalités :

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

On en déduit les règles classiques sur la manipulation des inégalités :

Exercice

Montrer les règles d'usage suivantes :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ x' \leq y' \end{array} \right. \implies x + x' \leq y + y'$$

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq x' \leq y' \end{array} \right. \implies xx' \leq yy'$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \implies -y \leq -x$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x \leq y \implies 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Définition - Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus

grand des deux réels x et $-x$).

$d(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Définition - Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (plus

grand des deux réels x et $-x$).

$d(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y de la droite réelle.

Définition - Partie positive, partie négative

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^+ = \max(x, 0)$ (partie positive du réel x)

et $x^- = \max(-x, 0)$ (partie négative du réel x).

Ces deux réels sont POSITIFS.

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^- .

Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x .

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^- .

Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x .

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$$

$$|x| \geq M \iff (x \geq M \text{ ou } x \leq -M)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x| |y|$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) \geq d(|x|, |y|) \text{ ou } |x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|$$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Exercice

Ecrire $|x|$ en fonction de x^+ et x^- .

Ecrire x^+ en fonction de $|x|$ et de x .

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

Proposition - Encadrements à connaître

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$$

$$|x| \geq M \iff (x \geq M \text{ ou } x \leq -M)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| = |x| |y|$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, y) \geq d(|x|, |y|) \text{ ou } |x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geq A$$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geq A$$

Démonstration

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geq A$$

Démonstration

Définition - Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leq x < n + 1$.
 n s'appelle la partie entière de x , on la note $[x]$. On a donc

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < [x] \leq x.$$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Lemme - Lemme d'Archimède

Comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \times a \geq A$$

Démonstration

Définition - Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leq x < n + 1$.
 n s'appelle la partie entière de x , on la note $[x]$. On a donc

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < [x] \leq x.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Applications

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}.$$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Applications

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}.$$

Savoir-faire. Travailler avec la partie décimale

Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale

$$\theta : \theta(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

On voit que $\theta(x) \in [0, 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Applications

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, montrer :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire la partie entière du réel

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}.$$

Savoir-faire. Travailler avec la partie décimale

Fréquemment, on exploite également la fonction partie décimale

$$\theta : \theta(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

On voit que $\theta(x) \in [0, 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Exercice

Pour tout réel x , déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Construction de $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et
 $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- ▶ Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)
- ▶ Lemme de croissance : $(a_n) \nearrow$, $(f_n) \searrow$ et (c_n, d_n) bissecantes tels que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq d_n$ et $c_n \leq f_n$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq f_n$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- ▶ Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)
- ▶ Lemme de croissance : $(a_n) \nearrow$, $(f_n) \searrow$ et (c_n, d_n) bissecantes tels que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq d_n$ et $c_n \leq f_n$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq f_n$
- ▶ Relation d'équivalence sur les bissecantes (a_n, b_n) et (c_n, d_n) :
 $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq b_n$ et $a_n \leq d_n$ On peut exploiter l'indicatrice !

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- ▶ Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)
- ▶ Lemme de croissance : $(a_n) \nearrow$, $(f_n) \searrow$ et (c_n, d_n) bissecantes tels que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq d_n$ et $c_n \leq f_n$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq f_n$
- ▶ Relation d'équivalence sur les bissecantes (a_n, b_n) et (c_n, d_n) :
 $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq b_n$ et $a_n \leq d_n$ On peut exploiter l'indicatrice !
- ▶ Extension de l'inégalité $\leq_{\mathbb{Q}}$.

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- ▶ Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)
- ▶ Lemme de croissance : $(a_n) \nearrow$, $(f_n) \searrow$ et (c_n, d_n) bissecantes tels que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq d_n$ et $c_n \leq f_n$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq f_n$
- ▶ Relation d'équivalence sur les bissecantes (a_n, b_n) et (c_n, d_n) :
 $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq b_n$ et $a_n \leq d_n$ On peut exploiter l'indicatrice !
- ▶ Extension de l'inégalité $\leq_{\mathbb{Q}}$.
- ▶ Extension de l'addition et de la multiplication (segments emboîtés)

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

- ▶ Suites bissecantes de rationnels : $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$ et $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
(cf. dichotomie)
- ▶ Lemme de croissance : $(a_n) \nearrow$, $(f_n) \searrow$ et (c_n, d_n) bissecantes tels que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq d_n$ et $c_n \leq f_n$
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq f_n$
- ▶ Relation d'équivalence sur les bissecantes (a_n, b_n) et (c_n, d_n) :
 $\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq b_n$ et $a_n \leq d_n$ On peut exploiter l'indicatrice !
- ▶ Extension de l'inégalité $\leq_{\mathbb{Q}}$.
- ▶ Extension de l'addition et de la multiplication (segments emboîtés)
- ▶ Compatibilité

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Construction de $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissecantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

- ▶ Valeur absolue

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 9

4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie

- ▶ Exercices N°289, 290
- ▶ TD de jeudi : 8h-10h : 293, 297, 299, 353 impairs, 354, 355
10h-12h : 294, 298, 300, 353 pairs, 352, 356
- ▶ Cahier de calcul : chapitre 21 - page 46

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

- ▶ Valeur absolue
- ▶ Partie positive, partie négative d'un nombre

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 9

4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie

- ▶ Exercices N°289, 290
- ▶ TD de jeudi : 8h-10h : 293, 297, 299, 353 impairs, 354, 355
10h-12h : 294, 298, 300, 353 pairs, 352, 356
- ▶ Cahier de calcul : chapitre 21 - page 46

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

- ▶ Valeur absolue
- ▶ Partie positive, partie négative d'un nombre
- ▶ Lemme d'Archimède puis partie entière et partie décimale

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 9
4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie
- ▶ Exercices N°289, 290
- ▶ TD de jeudi : 8h-10h : 293, 297, 299, 353 impairs, 354, 355
10h-12h : 294, 298, 300, 353 pairs, 352, 356
- ▶ Cahier de calcul : chapitre 21 - page 46

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions
classiques associées
à $\mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Nombres
algébriques

3. Construction de $\mathbb{R}$

3.1. Couple de suites
bissectantes

3.2. Construction de $\mathbb{R}$

3.3. Relation d'ordre

3.4. Corps $\mathbb{R}$

3.5. Fonctions classiques
associées à $\mathbb{R}$