Leçon 34 - Construction d'ensembles numériques

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{R}$

⇒ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

Rappels

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés ici au cas réel :

Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :

- A est *majoré* s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait $x \leqslant M$.
  M est alors un majorant de A.
- A est *minoré* s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait $m \leqslant x$.
  m est alors un minorant de A.
- Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Rappels

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés ici au cas réel :

Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que :

- A est *majoré* s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait $x \leqslant M$.
  M est alors un majorant de A.
- A est *minoré* s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait $m \leqslant x$.
  m est alors un minorant de A.
- Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Remarque Ensemble $\mathbb{N}$

Application à $\mathbb{R}$

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et si il admet un plus petit élément a, alors a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$:
$$\sup A := \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \leqslant M\} \text{ (si non vide)}$$
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et si il admet un plus grand élément b, alors b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$:
$$\inf A := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \geqslant m\} \text{ (si non vide)}$$

Application à $\mathbb{R}$

Définition - Borne inférieure, borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

- Si l'ensemble des majorants de A est non vide et si il admet un plus petit élément a, alors a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$:
$$\sup A := \min\{M \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \leqslant M\} \text{ (si non vide)}$$
- Si l'ensemble des minorants de A est non vide et si il admet un plus grand élément b, alors b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$:
$$\inf A := \max\{m \in \mathbb{R} \mid \forall\ a \in A, a \geqslant m\} \text{ (si non vide)}$$

Attention - Borne supérieure

Comme son nom ne l'indique pas, la borne supérieure est par définition le plus **petit** élément d'un certain ensemble (celui des majorants).

Illustration

L'exercice suivant donne des exemples à toujours bien garder dans un coin de sa tête...

Exercice

Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure (sur $\mathbb{R}$) des parties suivantes :

$$A = [0,1], \quad B = [0,1[, \quad C = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Condition d'existence

Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).
Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

Condition d’existence

Proposition - Condition d’existence de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).
Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

Savoir-faire. Etudier une borne supérieure

En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalité :

- $\forall\ a \in A,\ a \leqslant \sup A$ (minoration de $\sup A$)
- $\forall\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ a \in A,\ a \leqslant M$, alors $M \geqslant \sup A$ (majoration de $\sup A$)

Condition d'existence

Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).
Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et $\sup A = a$ (resp $\inf A = b$).

Savoir-faire. Etudier une borne supérieure

En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalité :

- $\forall\ a \in A,\ a \leqslant \sup A$ (minoration de $\sup A$)
- $\forall\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ a \in A,\ a \leqslant M$, alors $M \geqslant \sup A$ (majoration de $\sup A$)

On a évidemment des relations symétriques pour la borne inférieure...

Exercice

<u>Exercice</u>

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant des bornes supérieures. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B.$$

Donner un résultat similaires avec les bornes inférieures.

Caractéristiques

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

Caractéristiques

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

Proposition - Caractérisation de la borne sup.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$a = \sup A \text{ si et seulement si } \begin{cases} \forall\, x \in A, x \leqslant a \\ \forall\, \epsilon > 0, \exists\, x_\epsilon \in A \mid , a - \epsilon < x_\epsilon \end{cases}$$

Caractéristiques

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

Proposition - Caractérisation de la borne sup.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$a = \sup A \text{ si et seulement si } \begin{cases} \forall\ x \in A, x \leqslant a \\ \forall\ \epsilon > 0, \exists\ x_\epsilon \in A \ \mid, a - \epsilon < x_\epsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation de la borne inf.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors

$$b = \inf A \text{ si et seulement si } \begin{cases} \forall x \in A, b \leqslant x \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A \mid x_\epsilon < b + \epsilon \end{cases}$$

Caractéristiques

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations *opératoires* (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

Proposition - Caractérisation de la borne sup.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$a = \sup A \text{ si et seulement si } \begin{cases} \forall\ x \in A, x \leqslant a \\ \forall\ \epsilon > 0, \exists\ x_\epsilon \in A \mid, a - \epsilon < x_\epsilon \end{cases}$$

Proposition - Caractérisation de la borne inf.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors

$$b = \inf A \text{ si et seulement si } \begin{cases} \forall x \in A, b \leqslant x \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A \mid x_\epsilon < b + \epsilon \end{cases}$$

Démonstration

Conditition d'existence dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$.

Conditition d'existence dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$.

Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Conditition d'existence dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$.

Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Attention - Propriété non vérifiée par $\mathbb{Q}$

Cette propriété différencie $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$:

- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$ admet une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$), que l'on notera : $\sqrt{2}$
- mais $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$
  (non existence d'un plus petit élément dans $\mathbb{Q}$ de l'ensemble des majorants rationnels).

Condititition d'existence dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$.

Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Conditition d'existence dans $\mathbb{R}$

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de $\mathbb{R}$.

Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Heuristique - Manipuler l'ensemble des majorants et non l'ensemble E lui-même

L'ensemble E peut être très compliqué, un ensemble à trous par exemple : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[(1+\frac{1}{n})^n-\frac{1}{n^2};(1+\frac{1}{n})^n+\frac{1}{n^2}\right]$.
Il vaut mieux raisonner sur l'ensemble des majorants $\mathscr{M}$: celui-ci est nécessairement un intervalle. Mieux (mais on ne le sait pas encore), il s'agit de l'intervalle fermé $[\sup E, +\infty[$

Nullité d'un nombre

<u>Exercice</u>

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble $\mathscr{M}(A)$?

Nullité d'un nombre

Exercice

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble $\mathscr{M}(A)$?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel a vérifiant $\forall \epsilon > 0$, $|a| \leqslant \epsilon$ est nul.

Nullité d'un nombre

<u>Exercice</u>

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble $\mathscr{M}(A)$?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel a vérifiant $\forall \epsilon > 0$, $|a| \leqslant \epsilon$ est nul.

Démonstration

Nullité d'un nombre

Exercice

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble $\mathscr{M}(A)$?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel a vérifiant $\forall \epsilon > 0$, $|a| \leqslant \epsilon$ est nul.

Démonstration

On avait déjà fait une démonstration ici par contraposée.

$\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fonctions classiques associées à $\mathbb{R}$

1. Problèmes
2. Nombres algébriques
3. Construction de $\mathbb{R}$
4. Parties de $\mathbb{R}$ et topologie
   4.1. Bornes supérieure et inférieure
   4.2. Densité de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Sous-ensembles $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}$

Définition - Ensemble des décimaux

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On dit que x est un nombre décimal s'il existe $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^n}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Sous-ensembles $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}$

Définition - Ensemble des décimaux

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On dit que x est un nombre décimal s'il existe $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{p}{10^n}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux. On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Remarque Un nombre décimal...

Valeur décimale approchée

Définition - Valeur décimale approchée

Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\dfrac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{10^n}$,
on dit que $\dfrac{p}{10^n}$ (resp. $\dfrac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Valeur décimale approchée

Définition - Valeur décimale approchée

Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\dfrac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{10^n}$,
on dit que $\dfrac{p}{10^n}$ (resp. $\dfrac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n}.

Valeur décimale approchée

Définition - Valeur décimale approchée

Si $p \in \mathbb{Z}$ est tel que $\dfrac{p}{10^n} \leqslant x \leqslant \dfrac{p+1}{10^n}$, on dit que $\dfrac{p}{10^n}$ (resp. $\dfrac{p+1}{10^n}$) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision 10^{-n}.

Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (resp. $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision 10^{-n}.

Démonstration

$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$

Heuristique - Une partie dense ?

Une partie X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec ses propres éléments.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$

Heuristique - Une partie dense ?

Une partie X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec ses propres éléments.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse Vers une définition équivalente

$\mathbb{D}$ (et $\mathbb{Q}$) denses dans $\mathbb{R}$

Heuristique - Une partie dense ?

Une partie X est dense dans $\mathbb{R}$ si elle peut toucher (à $\epsilon > 0$ près - choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de $\mathbb{R}$ avec ses propres éléments.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse Vers une définition équivalente

Définition - Partie dense

Une partie non vide X de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$
si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide,
c'est-à-dire si pour deux réels a et b, $a < b$, il existe $x \in X \cap]a, b[$.

$\overline{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Par construction de $\mathbb{R}$, le résultat est évident concernant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Par construction de $\mathbb{R}$, le résultat est évident concernant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Démonstration

$\overline{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Théorème - Parties denses dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Par construction de $\mathbb{R}$, le résultat est évident concernant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrons la densité de $\mathbb{D}$ et celle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration

Corollaire -

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient donc au moins un rationnel et un irrationnel.
On en déduit qu'il y a un rationnel (ainsi qu'un irrationnel)« aussi proche que l'on veut »d'un réel x donné :

Soit

$$x \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}, |x - r| < \epsilon, \quad \exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - \xi| < \epsilon$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ Densités dans $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

- Définition : $\sup A$ est des majorants, le plus petits.

Conclusion

Objectifs

⇒ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

- Définition : $\sup A$ est des majorants, le plus petits.
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow \sup A \leqslant M$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

- Définition : $\sup A$ est des majorants, le plus petits.
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow \sup A \leqslant M$
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ x \in A$ tel que $\sup A \leqslant x + \epsilon$

Conclusion

Objectifs

⇒ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

- Définition : $\sup A$ est des majorants, le plus petits.
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow \sup A \leqslant M$
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ x \in A$ tel que $\sup A \leqslant x + \epsilon$
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

- Définition : $\sup A$ est des majorants, le plus petits.
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ x \in A, x \leqslant M) \Rightarrow \sup A \leqslant M$
  $\forall\ x \in A,\ x \leqslant \sup A$ et $(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ x \in A$ tel que $\sup A \leqslant x + \epsilon$
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Version symétrique pour la borne inférieure.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ Densités dans $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

⇒ Densités dans $\mathbb{R}$

- Valeur approchée à 10^{-k}, par excès et par défaut

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ Densités dans $\mathbb{R}$

- Valeur approchée à 10^{-k}, par excès et par défaut
- Densité de $\mathbb{D}$, puis $\mathbb{Q}$ et enfin $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Propriétés de la borne supérieure (de $\mathbb{R}$)

⇒ Densités dans $\mathbb{R}$

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 18 - Suites numériques
  1. Problèmes
  2. Exemples fondamentaux
  3. Suites extraites
- Exercices N° 296 & 302