

Leçon 34 - Construction d'ensembles numériques

Leçon 34 -Construction d'ensembles numériques

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- Problème
- . Nombres lgébriques
- 3. Construction de R
- 4 Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et
- 4.2. Densité de D ou Q dans R

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

- 1. Problèmes
- 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de  $\mathbb{R}$  et topologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de  $\mathbb D$  ou  $\mathbb Q$  dans  $\mathbb R$

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- 1. Problème
- 2. Nombres
- 3 Construction do D
- I. Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et
- inférieure
  - . Densité de D ou Q dans

⇒ Fonctions classiques associées à R

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- 4.1. Bornes supérieure et inférioure

- Problèmes
- 2. Nombres algébriques
- Construction de ℝ
- 4. Parties de  $\mathbb{R}$  et topologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de D ou Q dans R

# Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné

Soit A un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit que :

- A est *majoré* s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait  $x \le M$ .
  - M est alors un majorant de A.
- A est *minoré* s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait  $m \le x$ .
  - m est alors un minorant de A.
- ► Si *A* est majoré et minoré, on dit qu'il est <u>borné</u>.

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problème
  - . Nombres laébriques
- Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et copologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 1.2. Densité de D ou Q dans R

ici au cas réel :

⇒ Fonctions classiques associées àℝ

4.1. Bornes supérieure et

Remarque Ensemble N

## Définition - Sous-ensemble majoré, minoré, borné

Soit A un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . On dit que :

ightharpoonup A est *majoré* s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait  $x \leq M$ .

On commence par quelques rappels de définitions, mais adaptés

M est alors un majorant de A.

ightharpoonup A est *minoré* s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait  $m \leq x$ .

m est alors un minorant de A.

Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

# Définition - Borne inférieure, borne supérieure

#### Soit $A \subset \mathbb{R}$ .

Si l'ensemble des majorants de A est non vide et si il admet un plus petit élément a, alors a est appelé borne supérieure de A, on note  $a = \sup A$ :

 $\sup A := \min \{ M \in \mathbb{R} \mid \forall \ a \in A, a \leq M \} \text{ (si non vide)}$ 

Si l'ensemble des minorants de A est non vide et si il admet un plus grand élément b, alors b est appelé borne inférieure de A, on note  $b=\inf A$ :  $\inf A:=\max\{m\in\mathbb{R}\mid\forall\ a\in A,a\geqslant m\}\ (\text{si non vide})$ 

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- 1. Probleme
  - 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
  - Parties de ℝ et topologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - reneure

#### Soit $A \subset \mathbb{R}$ .

Si l'ensemble des majorants de A est non vide et si il admet un plus petit élément a, alors a est appelé borne supérieure de A, on note  $a = \sup A$ :

 $\sup A := \min \{ M \in \mathbb{R} \mid \forall \ a \in A, a \leq M \} \text{ (si non vide)}$ 

DESTREE THE THE

Si l'ensemble des minorants de A est non vide et si il admet un plus grand élément b, alors b est appelé borne inférieure de A, on note  $b=\inf A$ :  $\inf A:=\max\{m\in\mathbb{R}\mid\forall\ a\in A,a\geqslant m\}\ (\text{si non vide})$ 

## Attention - Borne supérieure

Comme son nom ne l'indique pas, la borne supérieure est par définition le plus **petit** élément d'un certain ensemble (celui des majorants).

Leçon 34 -Construction d'ensembles numériques

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
  - Problème
  - 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
- Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans R

- 1. Problèmes
  - lgébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q o

L'exercice suivant donne des exemples à toujours bien garder dans un coin de sa tête...

#### Exercice

Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure (sur  $\mathbb R$ ) des parties suivantes :

$$A = [0, 1], \quad B = [0, 1[, \quad C = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}]$$

## Proposition - Condition d'existence de la borne supérieure

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).

Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et  $\sup A = a$  (resp  $\inf A = b$ ).

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème
  - Nombres
- 3. Construction de  $\mathbb R$
- Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 2. Densité de D ou O c

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).

Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et  $\sup A = a$  (resp  $\inf A = b$ ).

## Savoir-faire. Etudier une borne supérieure

En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalité :

- $ightharpoonup \forall a \in A, a \leq \sup A \text{ (minoration de } \sup A)$
- ▶  $\forall M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall a \in A, a \leq M$ , alors  $M \geqslant \sup A$  (majoration de  $\sup A$ )

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problèmes
  - Nombres gébriques
- 3. Construction de ℝ
- Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans R

Soit  $A \subset \mathbb{R}$  non vide. On suppose que A possède un plus grand élément a (resp. plus petit élément b).

Alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et  $\sup A = a$  (resp  $\inf A = b$ ).

## Savoir-faire. Etudier une borne supérieure

En règle générale, pour obtenir une égalité sur la borne supérieure, on exploite deux inégalité :

- $\forall a \in A, a \leq \sup A \text{ (minoration de } \sup A)$
- ▶  $\forall M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall a \in A, a \leq M$ , alors  $M \geqslant \sup A$  (majoration de  $\sup A$ )

On a évidemment des relations symétriques pour la borne inférieure...

- ⇒ Construction de ℝ
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
  - Problèmes
    - Nombres jébriques
- Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et
- 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- 4.1. Bornes supérieure et

# Exercice

Soient A et B deux parties de  $\mathbb{R}$  admettant des bornes supérieures. Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$
.

Donner un résultat similaires avec les bornes inférieures.

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations opératoires (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problème
  - Nombres
- 3. Construction de R
- opologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure

Les deux propositions suivantes donnent des caractérisations opératoires (avec lesquelles travailler dans les démonstrations) et donc un nouveau savoir-faire.

## Proposition - Caractérisation de la borne sup.

$$\begin{split} & \text{Soit } A \subset \mathbb{R} \text{ et } a \in \mathbb{R}. \text{ Alors} \\ & a = \sup A \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \forall \ x \in A, x \leqslant a \\ \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ x_{\epsilon} \in A \ | \ , a - \epsilon < x_{\epsilon} \end{array} \right. \end{split}$$

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- Problème
- 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et
- nférieure

## Proposition - Caractérisation de la borne sup.

$$\begin{split} & \text{Soit } A \subset \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Alors} \\ & a = \sup A \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \forall \ x \in A, x \leqslant \alpha \\ \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ x_{\epsilon} \in A \ | \ , a - \epsilon < x_{\epsilon} \end{array} \right. \end{split}$$

## Proposition - Caractérisation de la borne inf.

$$\begin{array}{l} \text{Soit } A \subset \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}. \text{ Alors} \\ b = \inf A \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, \, b \leqslant x \\ \forall \epsilon > 0, \, \exists x_\epsilon \in A \, | \, x_\epsilon < b + \epsilon \end{array} \right. \end{array}$$

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- Problème
- 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans R

## Proposition - Caractérisation de la borne sup.

$$\begin{split} & \text{Soit } A \subset \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ Alors} \\ & a = \sup A \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \forall \ x \in A, x \leqslant \alpha \\ \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ x_{\epsilon} \in A \ | \ , a - \epsilon < x_{\epsilon} \end{array} \right. \end{split}$$

## Proposition - Caractérisation de la borne inf.

$$\begin{array}{l} \text{Soit } A \subset \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}. \text{ Alors} \\ b = \inf A \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, \, b \leqslant x \\ \forall \epsilon > 0, \, \exists x_\epsilon \in A \, | \, x_\epsilon < b + \epsilon \end{array} \right. \end{array}$$

#### Démonstration

⇒ Construction de R

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

- Problème
- algébriques
- 3. Construction de  $\mathbb R$
- topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans R

## Conditition d'existence dans ℝ

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de  $\mathbb{R}$ .

Leçon 34 -Construction d'ensembles numériques

 $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$ 

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

- Problèmes
  - lgébriques
- 3. Construction de R
- opologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- I.2. Densité de D ou Q dan

## Conditition d'existence dans R

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de R.

## Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb R$  admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée de  $\mathbb R$  admet une borne inférieure.

Leçon 34 -Construction d'ensembles numériques

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- 1. Problèmes
  - Nombres ébriques
- 3. Construction de  $\mathbb R$
- 4. Parties de R et
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 2 Daneitá de Diou O dane P

## Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb R$  admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée de  $\mathbb R$  admet une borne inférieure.

## Attention - Propriété non vérifiée par Q

Cette propriété différencie  $\mathbb R$  et  $\mathbb Q$  :

des majorants rationnels).

- ▶  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$  admet une borne supérieure (dans  $\mathbb{R}$ ), que l'on notera :  $\sqrt{2}$
- mais  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$  (non existence d'un plus petit élément dans  $\mathbb{Q}$  de l'ensemble

⇒ Construction de R

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

- 1. Problèmes
  - Nombres
- 3. Construction de R
- Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- I.2. Densité de D ou Q dans R

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de  $\mathbb{R}$ .

# Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb R$  admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée de  $\mathbb R$  admet une borne inférieure.

- ⇒ Construction de ℝ
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème:
  - Nombres
- 3. Construction de R
  - I. Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- .2. Densité de D ou O dan

Parties de ℝ et opologie

4.1. Bornes supérieure et

4.2. Densité de D ou Q dans F

Le théorème suivant est parfois pris comme caractérisation de  $\mathbb{R}$ .

## Théorème - Existence de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée de  $\mathbb R$  admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée de  $\mathbb R$  admet une borne inférieure.

# Heuristique - Manipuler l'ensemble des majorants et non l'ensemble E lui-même

L'ensemble E peut être très compliqué, un ensemble à trous par exemple :  $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[(1+\frac{1}{n})^n-\frac{1}{n^2};(1+\frac{1}{n})^n+\frac{1}{n^2}\right]$ .

Il vaut mieux raisonner sur l'ensemble des majorants  $\mathcal M$ : celui-ci est nécessairement un intervalle. Mieux (mais on ne le sait pas encore), il s'agit de l'intervalle fermé  $[\sup E, +\infty[$ 

- $\Rightarrow \text{Construction de } \mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problème
  - lgébriques
  - 3. Construction de R
  - a. Parties de ℝ et opologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
    - 2. Densité de D ou Q dans R

- Exercice
- Soit A une partie de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathscr{M}(A)$  l'ensemble des majorants de A .
- A quoi ressemble  $\mathcal{M}(A)$ ?

4.1. Bornes supérieure et inférieure

#### Exercice

Soit A une partie de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble  $\mathcal{M}(A)$ ?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel  $\alpha$  vérifiant  $\forall \epsilon > 0$ ,  $|\alpha| \le \epsilon$  est nul.

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- 4.1. Bornes supérieure et inférioure

#### Exercice

Soit A une partie de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble  $\mathcal{M}(A)$ ?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel  $\alpha$  vérifiant  $\forall \epsilon > 0$ ,  $|\alpha| \le \epsilon$  est nul.

#### Démonstration

- ⇒ Construction de ℝ
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ
- - 4.1. Bornes supérieure et inférioure

#### Exercice

Soit A une partie de  $\mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{M}(A)$  l'ensemble des majorants de A.

A quoi ressemble  $\mathcal{M}(A)$ ?

Corollaire - Critère de nullité d'un nombre

Un réel  $\alpha$  vérifiant  $\forall \epsilon > 0$ ,  $|\alpha| \le \epsilon$  est nul.

### Démonstration

On avait déjà fait une démonstration ici par contraposée.

⇒ Fonctions classiques associées à R

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- 4.2. Densité de D ou O dans R

- Problèmes
- 2. Nombres algébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de  $\mathbb{R}$  et topologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de D ou Q dans R

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- Problèmes
  - lgébriques
- 3. Construction de R
  - a. Parties de ℝ et opologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

## Définition - Ensemble des décimaux

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On dit que x est un nombre décimal s'il existe  $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  tels gue x = p

que  $x = \frac{1}{10^n}$ 

On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux. On a  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- - 4.2. Densité de D ou O dans R

## Définition - Ensemble des décimaux

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On dit que x est un nombre décimal s'il existe  $p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  tels que  $x = \frac{p}{10^n}$ .

On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux. On a  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

Remarque Un nombre décimal...

## Définition - Valeur décimale approchée

Si 
$$p \in \mathbb{Z}$$
 est tel que  $\frac{p}{10^n} \le x \le \frac{p+1}{10^n}$ , on dit que  $\frac{p}{10^n}$  (resp.  $\frac{p+1}{10^n}$ ) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de  $x$  à la précision  $10^{-n}$ .

⇒ Construction de R

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- Problèmes
  - 2. Nombres alaébriques
- Construction de ℝ
  - 4. Parties de ℝ et copologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou O dans ℝ

#### $\Rightarrow$ Construction de $\mathbb{R}$

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

#### Problémes

aigebriques

#### 3. Construction de R

## 4. Parties de ℝ et topologie

4.1. Bornes supérieure e

4.2. Densité de D ou O dans R

#### 4 D > 4 A > 4 B > 4 B > 9 Q P

## Définition - Valeur décimale approchée

Si  $p \in \mathbb{Z}$  est tel que  $\frac{p}{10^n} \le x \le \frac{p+1}{10^n}$ , on dit que  $\frac{p}{10^n}$  (resp.  $\frac{p+1}{10^n}$ ) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision  $10^{-n}$ .

## Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  (resp.  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ ) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision  $10^{-n}$ .

Définition - Valeur décimale approchée

#### $\Rightarrow$ Construction de $\mathbb R$

 $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$ 

#### Problèmes

algébriques

#### Construction de ℝ

## 4. Parties de ℝ et

4.1. Bornes supérieure e

4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

## Démonstration

Si  $p \in \mathbb{Z}$  est tel que  $\frac{p}{10^n} \le x \le \frac{p+1}{10^n}$ , on dit que  $\frac{p}{10^n}$  (resp.  $\frac{p+1}{10^n}$ ) est une valeur décimale approchée par défaut (resp. par excès) de x à la précision  $10^{-n}$ .

## Proposition - Obtenir la valeur décimale approchée

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  (resp.  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ ) est une valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à la précision  $10^{-n}$ .

Une partie X est dense dans  $\mathbb R$  si elle peut toucher (à  $\epsilon>0$  près choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de  $\mathbb R$  avec ses propres éléments.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problème
  - . Nombres
- 3. Construction de ℝ
  - opologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

Une partie X est dense dans  $\mathbb R$  si elle peut toucher (à  $\epsilon>0$  près choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de  $\mathbb R$  avec ses propres éléments.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse Vers une définition équivalente

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problèmes
  - . Nombres laébriques
- 3. Construction de ℝ
- 4. Parties de ℝ et copologie
- 1.1. Bornes supérieure et nférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

Une partie X est dense dans  $\mathbb R$  si elle peut toucher (à  $\epsilon>0$  près choisi par avance, aussi petit qu'on veut) tous les éléments de  $\mathbb R$  avec ses propres éléments.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0, \exists r \in X, |x - r| < \epsilon$$

Analyse Vers une définition équivalente

#### Définition - Partie dense

Une partie non vide X de  $\mathbb R$  est dite dense dans  $\mathbb R$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide, c'est-à-dire si pour deux réels a et b, a < b, il existe  $x \in X \cap ]a, b[$ .

- ⇒ Construction de ℝ
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problème
  - Nombres gébriques
- 3. Construction de ℝ
- topologie
- 1.1. Bornes supérieure et nférieure
- 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

## Théorème - Parties denses dans R

 $\mathbb{D},\,\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}.$ 

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème
  - Nombres
- Construction de ℝ
- opologie
- 4.1. Bornes supérieure et
- 4.2. Densité de D ou O dans ℝ

#### Théorème - Parties denses dans R

 $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

Par construction de  $\mathbb{R}$ , le résultat est évident concernant la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démontrons la densité de  $\mathbb{D}$  et celle de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème
  - Nombres
- 3. Construction de R
  - pologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou O dans R

# Théorème - Parties denses dans R

 $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

Par construction de  $\mathbb{R}$ , le résultat est évident concernant la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démontrons la densité de  $\mathbb{D}$  et celle de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Démonstration

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- 1. Problème:
  - . Nombres
- 3. Construction de R
  - pologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou O dans R

# Théorème - Parties denses dans R

 $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

Par construction de  $\mathbb{R}$ , le résultat est évident concernant la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démontrons la densité de  $\mathbb{D}$  et celle de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

#### Démonstration

#### Corollaire -

Tout intervalle de  $\ensuremath{\mathbb{R}}$  contient donc au moins un rationnel et un irrationnel.

On en déduit qu'il y a un rationnel (ainsi qu'un irrationnel) « aussi proche que l'on veut » d'un réel x donné :

Soit

 $x \in \mathbb{R}$  :  $\forall \epsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}, |x - r| < \epsilon, \exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - \xi| < \epsilon$ 

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème
  - Nombres debriques
- 3. Construction de ℝ
  - 4. Parties de R et topologie
  - 4.1. Bornes supérieure et inférieure
  - 4.2. Densité de D ou Q dans ℝ

⇒ Densités dans R

- $\Rightarrow \text{Construction de } \mathbb{R}$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- Problème
  - Nombres
- 3. Construction de R
- i. Parties de ℝ et opologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de ℝ)
  - lacktriangle Définition :  $\sup A$  est des majorants, le plus petits.

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- 1. Problème
  - Nombres
- 3. Construction de F
- Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et
- 4.2 Densité de D ou O d

# Conclusion

# **Objectifs**

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de ℝ)
  - ▶ Définition :  $\sup A$  est des majorants, le plus petits.  $\forall x \in A, x \leq \sup A$  et  $(\forall x \in A, x \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$

Leçon 34 -Construction d'ensembles numériques

 $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$ 

⇒ Fonctions classiques associées à ℝ

- Problèm
  - algébriques
- 3. Construction de R
- 4. Parties de ℝ et topologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de ℝ)
  - ▶ Définition :  $\sup A$  est des majorants, le plus petits.  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \text{ et } (\forall \ x \in A, x \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \text{ et } (\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ x \in A \text{ tel que } \sup A \leq x + \varepsilon$

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- Problèm
  - . Nombres Igébriques
- 3. Construction de R
- 4. Parties de ℝ et copologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou Q

- ▶ Définition :  $\sup A$  est des majorants, le plus petits.  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \text{ et } (\forall \ x \in A, x \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \text{ et } (\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ x \in A \text{ tel que } \sup A \leq x + \varepsilon$
- ► Toute partie non vide majorée de R admet une borne supérieure.

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
  - . Problèmes
    - Nombres ébriques
- 3. Construction de R
- 4. Parties de ℝ et
- 4.1. Bornes supérieure et
- 4.2 Densité de D ou 0

- ▶ Définition :  $\sup A$  est des majorants, le plus petits.  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \ \text{et} \ (\forall \ x \in A, x \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M$  $\forall \ x \in A, \ x \leq \sup A \ \text{et} \ (\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ x \in A \ \text{tel que } \sup A \leq x + \varepsilon$
- ► Toute partie non vide majorée de R admet une borne supérieure.
- Version symétrique pour la borne inférieure.

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb{R}$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- Problème
  - Nombres gébriques
- 3. Construction de R
  - 4. Parties de R et
  - 4.1. Bornes supérieure et
  - 4.2 Densité de D ou C

⇒ Densités dans R

- $\Rightarrow \text{Construction de } \mathbb{R}$
- $\Rightarrow$  Fonctions classiques associées à  $\mathbb R$
- Problème
  - Nombres
- 3. Construction de R
- i. Parties de ℝ et opologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de ℝ)
- ⇒ Densités dans R
  - Valeur approchée à  $10^{-k}$ , par excès et par défaut

- $\Rightarrow$  Construction de  $\mathbb R$
- ⇒ Fonctions classiques associées à ℝ
- 1. Problème
  - Nombres
- 3. Construction de R
- I. Parties de ℝ et opologie
- 4.1. Bornes supérieure et inférieure
- 4.2. Densité de D ou

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de R)
- ⇒ Densités dans R
  - Valeur approchée à  $10^{-k}$ , par excès et par défaut
  - Densité de  $\mathbb{D}$ , puis  $\mathbb{Q}$  et enfin  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- ⇒ Construction de R
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- ⇒ Construction de ℝ
- ⇒ Fonctions classiques associées àℝ

- ⇒ Propriétés de la borne supérieure (de ℝ)
- ⇒ Densités dans ℝ

## Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 18 Suites numériques
  - Problèmes
  - 2. Exemples fondamentaux
  - Suites extraites
- Exercices N° 296 & 302