



## Leçon 43 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

4. Segments et compacités

3.2. Intervalle réel

4.1. Segments emboîtés

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4. Segments et  
compacités

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.1. Segments emboîtés

4.4. Lemme de Cousin

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

5. Curiosité topologique : complétude

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

5.1. Suites de Cauchy

4.4. Lemme de Cousin

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Ensemble (non) séparé

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Ensemble séparé

Soient  $A$  et  $B$ , deux parties de  $\mathbb{R}$ .

On dit  $A$  et  $B$  sont séparés si  $A \cap \overline{B} = \emptyset$  et  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ .

Aucun point de  $A$  n'est dans l'adhérence de  $B$ , aucun point de  $B$  n'est dans l'adhérence de  $A$ .

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Ensemble connexe

## Définition - Ensemble connexe

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $E$  est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vides.

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Ensemble connexe

## Définition - Ensemble connexe

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $E$  est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vides.

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Savoir-faire. Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe

La méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre  $x_0$  qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble  $A$  (à inventer) et élément de  $B$  ou bien élément de  $A$  et borne inférieure de  $B$ . A partir de ce  $x_0$ , trouver une contradiction.

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

4. Segments et compacités

3.2. Intervalle réel

4.1. Segments emboîtés

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4. Segments et  
compacités

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.1. Segments emboîtés

4.4. Lemme de Cousin

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

5. Curiosité topologique : complétude

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

5.1. Suites de Cauchy

4.4. Lemme de Cousin

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Intervalles

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  si il vérifie :

$$\forall x < y \in I, \quad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subset I$$

( $I$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ ).

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Intervalles

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  si il vérifie :

$$\forall x < y \in I, \quad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subset I$$

( $I$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ ).

On notera plus simplement  $[a, b]$  l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\}$  dont il est question dans la définition.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Intervalles

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  si il vérifie :

$$\forall x < y \in I, \quad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subset I$$

( $I$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ ).

On notera plus simplement  $[a, b]$  l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\}$  dont il est question dans la définition.

**Exemple** Ensemble des majorants d'une partie majorée

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est de la forme  $(a, b)$ , avec  $a < b$  et  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Par notation " $(, )$ "  $\in \{[ , ]\}$ .

Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $]a, b[ \subset I \subset [a, b]$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est de la forme  $(a, b)$ , avec  $a < b$  et  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Par notation " $(, )$ "  $\in \{[ , ]\}$ .

Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $]a, b[ \subset I \subset [a, b]$ .

## Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est de la forme  $(a, b)$ , avec  $a < b$  et  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Par notation " $(, )$ "  $\in \{[ , ]\}$ .

Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $]a, b[ \subset I \subset [a, b]$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Démonstration

On a vu que dans  $\mathbb{R}$ , les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

## Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si  $X$  est un connexe de  $\mathbb{R}$ , alors  $X$  est un intervalle.

# Intervalles de $\mathbb{R}$

## Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de  $\mathbb{R}$  est de la forme  $(a, b)$ , avec  $a < b$  et  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Par notation " $(, )$ "  $\in \{[ , ]\}$ .

Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $]a, b[ \subset I \subset [a, b]$ .

## Démonstration

On a vu que dans  $\mathbb{R}$ , les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

## Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si  $X$  est un connexe de  $\mathbb{R}$ , alors  $X$  est un intervalle.

## Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

4. Segments et compacités

3.2. Intervalle réel

4.1. Segments emboîtés

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.1. Segments emboîtés

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.4. Lemme de Cousin

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

5. Curiosité topologique : complétude

4.4. Lemme de Cousin

5.1. Suites de Cauchy

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.1. Suites de Cauchy

# Achevons $\mathbb{R}$

## Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure :  $+\infty$  à une partie non majorée de  $\mathbb{R}$  et une borne inférieure :  $-\infty$  à une partie non minorée de  $\mathbb{R}$ .

Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.

Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure*

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Achevons $\mathbb{R}$

## Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure :  $+\infty$  à une partie non majorée de  $\mathbb{R}$  et une borne inférieure :  $-\infty$  à une partie non minorée de  $\mathbb{R}$ .

Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.

Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure*

## Définition - Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On définit :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  où  $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$   
et on prolonge la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq +\infty \text{ et } x \geq -\infty.$$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  sans aboutir à des incohérences ;  
pour «  $0 \times +\infty$ ,  $0 \times -\infty$  et  $(+\infty) + (-\infty)$  ».

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  sans aboutir à des incohérences ;  
pour «  $0 \times +\infty$ ,  $0 \times -\infty$  et  $(+\infty) + (-\infty)$  ».

Ce que l'on gagne :

## Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , toute partie de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  sans aboutir à des incohérences ;  
pour «  $0 \times +\infty$ ,  $0 \times -\infty$  et  $(+\infty) + (-\infty)$  ».

Ce que l'on gagne :

## Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , toute partie de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure et une borne inférieure

## Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Définition - Segment

On appelle segment de  $\mathbb{R}$ , tout intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ .

# Segment

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Segment

On appelle segment de  $\mathbb{R}$ , tout intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Suite de segments emboîtés de limite nulle

En exploitant les suites adjacentes réelles :

## Proposition - Théorème des segments emboîtés de longueur tendant vers 0

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de segments emboîtés (i.e.  $I_{n+1} \subset I_n$ ), de longueur tendant vers 0 (i.e. si  $I_n = [a_n, b_n]$  alors  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ).

Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \mid \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}.$$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Suite de segments emboîtés de limite nulle

En exploitant les suites adjacentes réelles :

## Proposition - Théorème des segments emboîtés de longueur tendant vers 0

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de segments emboîtés (i.e.  $I_{n+1} \subset I_n$ ), de longueur tendant vers 0 (i.e. si  $I_n = [a_n, b_n]$  alors  $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ).

Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \mid \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}.$$

## Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Fonctions d'intervalles

## Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de  $(a, b)$  une application  $F$  de l'ensemble des sous-intervalles de  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est sous-additive sur  $(a, b)$  si

$$\forall \alpha < \beta < \gamma \in [a, b], \quad F(\alpha, \gamma) \leq F(\alpha, \beta) + F(\beta, \gamma)$$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Fonctions d'intervalles

## Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de  $(a, b)$  une application  $F$  de l'ensemble des sous-intervalles de  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est sous-additive sur  $(a, b)$  si

$$\forall \alpha < \beta < \gamma \in [a, b], \quad F(\alpha, \gamma) \leq F(\alpha, \beta) + F(\beta, \gamma)$$

## Exemple L'intégrale de $f$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Fonctions d'intervalles

## Définition - Fonctions d'intervalles. Sous-additivité

On appelle fonction d'intervalles de  $(a, b)$  une application  $F$  de l'ensemble des sous-intervalles de  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est sous-additive sur  $(a, b)$  si

$$\forall \alpha < \beta < \gamma \in [a, b], \quad F(\alpha, \gamma) \leq F(\alpha, \beta) + F(\beta, \gamma)$$

## Exemple L'intégrale de $f$

## Définition - Fonction paramétrée par une famille de propositions

Soit  $(\mathcal{P}_I)_{I \subset [a, b]}$ , une famille de propositions sur les sous-intervalles de  $[a, b]$ .

L'application  $f_{\mathcal{P}} : (\alpha, \beta) \mapsto [\mathcal{P}_{[\alpha, \beta]}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ vraie} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}_{[\alpha, \beta]} \text{ fausse} \end{cases}$  est une fonction d'intervalles.

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Fonctions d'intervalles (savoir-faire)

**Savoir-faire. Sous-additivité pour un fonction d'intervalle définie par une propriété**

Dans ce cas, on doit vérifier :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [a, b], \quad f_{\mathcal{P}}(\alpha, \gamma) \leq f_{\mathcal{P}}(\alpha, \beta) + f_{\mathcal{P}}(\beta, \gamma)$$

Or  $f_{\mathcal{P}}$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Donc la sous-additivité est équivalente au fait que

$$f_{\mathcal{P}}(\alpha, \beta) = f_{\mathcal{P}}(\beta, \gamma) = 0 \implies f_{\mathcal{P}}(\alpha, \gamma) = 0$$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite,  
toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$   
(Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$  (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

## Proposition - Processus de dichotomie

Soit  $[a, b]$  un segment (intervalle fermé) de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathcal{P}_I)$ , une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de  $[a, b]$ .

Supposons que  $f_{\mathcal{P}}$  la fonction d'intervalles paramétrée par  $(\mathcal{P}_I)$  est sous-additive.

Si  $f_{\mathcal{P}}(a, b) = 1$ , il existe  $(a_n), (b_n)$  adjacentes dans  $[a, b]$  (ou une suite de segments  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ) emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\mathcal{P}}(a_n, b_n) = 1$ .

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$  (Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

## Proposition - Processus de dichotomie

Soit  $[a, b]$  un segment (intervalle fermé) de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathcal{P}_I)$ , une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de  $[a, b]$ .

Supposons que  $f_{\mathcal{P}}$  la fonction d'intervalles paramétrée par  $(\mathcal{P}_I)$  est sous-additive.

Si  $f_{\mathcal{P}}(a, b) = 1$ , il existe  $(a_n), (b_n)$  adjacentes dans  $[a, b]$  (ou une suite de segments  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ) emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\mathcal{P}}(a_n, b_n) = 1$ .

**Remarque** Simplification des notations

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Application de la dichotomie

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

Voyons en action ce principe, même si les objets suivants ne sont pas encore bien définis.

La structure d'application est proche de celle de la récurrence ou plutôt de la méthode de la descente infinie de FERMAT.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Application de la dichotomie

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

Voyons en action ce principe, même si les objets suivants ne sont pas encore bien définis.

La structure d'application est proche de celle de la récurrence ou plutôt de la méthode de la descente infinie de FERMAT.

**Application** Anticipation : TVI

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$   
(Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

## Proposition - Processus de dichotomie

Soit  $[a, b]$  un segment (intervalle fermé) de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathcal{P}_I)$ , une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de  $[a, b]$ .

Supposons que  $f_{\mathcal{P}}$  la fonction d'intervalles paramétrée par  $(\mathcal{P}_I)$  est sous-additive.

Si  $f_{\mathcal{P}}(a, b) = 1$ , il existe  $(a_n), (b_n)$  adjacentes dans  $[a, b]$  (ou une suite de segments  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ) emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\mathcal{P}}(a_n, b_n) = 1$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$   
(Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

## Proposition - Processus de dichotomie

Soit  $[a, b]$  un segment (intervalle fermé) de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathcal{P}_I)$ , une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de  $[a, b]$ .

Supposons que  $f_{\mathcal{P}}$  la fonction d'intervalles paramétrée par  $(\mathcal{P}_I)$  est sous-additive.

Si  $f_{\mathcal{P}}(a, b) = 1$ , il existe  $(a_n), (b_n)$  adjacentes dans  $[a, b]$  (ou une suite de segments  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ) emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\mathcal{P}}(a_n, b_n) = 1$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Démonstration

# Principe de Dichotomie

Le principe suivant nous sera utile plusieurs fois par la suite, toujours à propos de résultats très fins sur  $\mathbb{R}$   
(Bolzano-Weierstrass, Cousin, valeurs intermédiaires...)

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Proposition - Processus de dichotomie

Soit  $[a, b]$  un segment (intervalle fermé) de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(\mathcal{P}_I)$ , une famille de propositions définie sur l'ensemble des sous-segments de  $[a, b]$ .

Supposons que  $f_{\mathcal{P}}$  la fonction d'intervalles paramétrée par  $(\mathcal{P}_I)$  est sous-additive.

Si  $f_{\mathcal{P}}(a, b) = 1$ , il existe  $(a_n), (b_n)$  adjacentes dans  $[a, b]$  (ou une suite de segments  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  emboités de longueur tendant vers 0) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{\mathcal{P}}(a_n, b_n) = 1$ .

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Démonstration

**Remarque** Longueur de  $I_n$

# Mode d'application du principe de dichotomie

Analysez bien ces deux types d'applications du processus de dichotomie. Dans quel cas se trouve le TVI ?

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Mode d'application du principe de dichotomie

Analysez bien ces deux types d'applications du processus de dichotomie. Dans quel cas se trouve le TVI ?

**Savoir-faire.** Comment exploiter le « processus de dichotomie ».

De manière générale, on exploite le processus de dichotomie de deux façons :

- ▶ Pour mettre en avant un objet  $x$  qui vérifie une propriété particulière. On le construit en tant que limite des suites adjacentes qui émergent. On suit un mouvement descendant.  
(C'est le cas de la démonstration du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASSS).
- ▶ Pour montrer une propriété vraie sur un intervalle compact (global). On le couple à un raisonnement par l'absurde. On suit un mouvement ascendant.  
(C'est le cas de la démonstration du lemme de COUSIN).

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

## Corollaire - Suite de points d'un segment

Soit  $(u_n)$  une suite de points du segment  $[a, b]$ . Alors il existe une suite extraite convergente.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

On a le corollaire (équivalent) :

## Corollaire - Suite de points d'un segment

Soit  $(u_n)$  une suite de points du segment  $[a, b]$ . Alors il existe une suite extraite convergente.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Version complexe

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Version complexe

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Pour la démonstration, on exploite le critère précédent.  
La subtilité : il y a deux suites extraites, a priori.

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Version complexe

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Pour la démonstration, on exploite le critère précédent.

La subtilité : il y a deux suites extraites, a priori.

### Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie  
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Motivations

## Heuristique. Pourquoi le lemme de Cousin ?

Le lemme de Cousin est une formulation particulièrement efficace des propriétés de compacité de  $\mathbb{R}$ .

Bien qu'il ne soit pas au programme officiel de la MPSI (ni de la MP), il figure dans ce cours car

- ▶ Il est vrai
- ▶ Il est commode. Nous l'exploiterons à quelques reprises dans le prochain chapitre de cours
- ▶ Il est nécessaire à la construction d'une intégrale robuste sur  $\mathbb{R}$  : l'intégrale de Kurzweil-Henstock que nous construirons au deuxième semestre.

Cela commence par deux définitions.

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Subdivision pointée adaptée

## Définition - Subdivision pointée

Soit  $I = [a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ .

On appelle subdivision pointée de  $I$  la donnée

- ▶ d'une subdivision (finie !)  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$ ,  
 $\forall i \in \mathbb{N}_{n-2}, a = x_0 \leq x_i \leq x_{i+1} \leq x_n = b$
- ▶ un pointage de cette subdivision  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$  tels que  
 $\forall i \in \mathbb{N}_n, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

On la notera  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ ,  
on appellera les  $(t_i)$  les points de marquage de  $\sigma_p$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Subdivision pointée adaptée

## Définition - Subdivision pointée

Soit  $I = [a, b]$ , un segment de  $\mathbb{R}$ .

On appelle subdivision pointée de  $I$  la donnée

- ▶ d'une subdivision (finie !)  $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  de  $[a, b]$ ,  
 $\forall i \in \mathbb{N}_{n-2}, a = x_0 \leq x_i \leq x_{i+1} \leq x_n = b$
- ▶ un pointage de cette subdivision  $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$  tels que  
 $\forall i \in \mathbb{N}_n, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

On la notera  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ ,  
on appellera les  $(t_i)$  les points de marquage de  $\sigma_p$ .

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Définition - Subdivision pointée adaptée à un jauge

Un pas ou une jauge est une application  $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ .

Une subdivision  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$  est dite  
adaptée au pas  $\delta$  ou  $\delta$ -fine, si

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \quad [x_{k-1}, x_k] \subset \left[ t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2} \right]$$

On remarquera que  $0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta(t_k)$

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

## Remarque Compacité

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Remarque Compacité

### Théorème - Lemme de COUSIN

Pour tout  $\delta$ , jauge sur  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  
 $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ , adaptée à  $\delta$   
( $\delta$ -fine)

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

## Remarque Compacité

### Théorème - Lemme de COUSIN

Pour tout  $\delta$ , jauge sur  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ , adaptée à  $\delta$  ( $\delta$ -fine)

## Remarque Une question de recouvrement

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

## Remarque Compacité

### Théorème - Lemme de COUSIN

Pour tout  $\delta$ , jauge sur  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ , adaptée à  $\delta$  ( $\delta$ -fine)

## Remarque Une question de recouvrement

### Exercice

Formaliser le lemme de COUSIN

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Remarques

## Attention. Strictement positif

Il est important que  $\delta(\cdot) > 0$ , comme on va le voir dans la démonstration du lemme de Cousin.

Par contre, il n'est pas nécessaire que  $\delta$  soit continue

## Remarque Compacité

## Théorème - Lemme de COUSIN

Pour tout  $\delta$ , jauge sur  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  $\sigma_p = \{([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n)\}$ , adaptée à  $\delta$  ( $\delta$ -fine)

## Remarque Une question de recouvrement

### Exercice

Formaliser le lemme de COUSIN

### Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Mode d'application du lemme de Cousin

## Savoir-faire. Exploiter le lemme de Cousin

Il y a deux façons d'exploiter le lemme de Cousin.

- On peut exploiter le lemme de Cousin par l'absurde.

On doit vérifier une certaine propriété  $\mathcal{P}$ .

On démontre alors que sa contradiction conduit à l'existence d'une jauge  $\delta$  sur un segment fermé qui n'admet pas de subdivision  $\delta$ -fine, ou une contradiction sur la finitude de la subdivision.

Trouver  $\delta$  n'est pas toujours évident. (On a une application de cette méthode plus bas).

- Une jauge  $\delta$  est naturellement donnée (exemple, la jauge de continuité).

Alors l'utilisation du lemme de Cousin conduit à couper l'intervalle en un nombre **fini** d'intervalles dont on maîtrise le « centre »( $t_i$ ).

Il reste ensuite à considérer un **max** et non un **sup**. (On applique cette méthode pour démontrer le théorème de Heine).

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Mode d'application du lemme de Cousin

## Savoir-faire. Exploiter le lemme de Cousin

Il y a deux façons d'exploiter le lemme de Cousin.

- On peut exploiter le lemme de Cousin par l'absurde.

On doit vérifier une certaine propriété  $\mathcal{P}$ .

On démontre alors que sa contradiction conduit à l'existence d'une jauge  $\delta$  sur un segment fermé qui n'admet pas de subdivision  $\delta$ -fine, ou une contradiction sur la finitude de la subdivision.

Trouver  $\delta$  n'est pas toujours évident. (On a une application de cette méthode plus bas).

- Une jauge  $\delta$  est naturellement donnée (exemple, la jauge de continuité).

Alors l'utilisation du lemme de Cousin conduit à couper l'intervalle en un nombre **fini** d'intervalles dont on maîtrise le « centre »( $t_i$ ).

Il reste ensuite à considérer un **max** et non un **sup**. (On applique cette méthode pour démontrer le théorème de Heine).

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

## Exemple Nouvelle démonstration du TBW

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie  
4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Concept

## Heuristique. Mise en place du concept

La difficulté avec les suites, c'est que pour démontrer leur convergence, on doit connaître la limite (la définition nécessite le calcul  $|u_n - \ell|$ ).

Que peut-on dire si la suite ne « bouge » plus, visiblement après un certain nombre de calculs ? CAUCHY propose de s'intéresser à ces suites là en particulier (on les appelle suite de CAUCHY).

Sont-elles nécessairement convergentes ? famille de suites  
Autre définition avec  $u_N$  au lieu de  $u_q$ , plus naturelle. Puis équivalence des deux définitions.

Interprétation avec  $\epsilon = 10^{-k}$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Définition

## Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite  $(u_n)$  vérifie le critère de CAUCHY si elle vérifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Définition

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite  $(u_n)$  vérifie le critère de CAUCHY si elle vérifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Montrons que les deux critères sont équivalents.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Définition

## Définition - Suites de CAUCHY

On dit que la suite  $(u_n)$  vérifie le critère de CAUCHY si elle vérifie l'un des deux critères suivants équivalents :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_0, |u_p - u_{n_0}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \epsilon$$

Montrons que les deux critères sont équivalents.

### Démonstration

**Application** Suite, écrite décimalemement

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes avec les segments

⇒ Complétude

Leçon 43 - Questions  
topologiques  
interprétées sur  $\mathbb{R}$

1. Problèmes

⇒ Méthodes  
segments

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

⇒ Complétude

3. Intervalles et connexité

1. Problèmes

3.1. Connexité

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3.2. Intervalle réel

3. Intervalles et  
connexité

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et compacités

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

## Proposition - Condition nécessaire

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

## Proposition - Condition nécessaire

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

## Démonstration

⇒ Méthodes segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

L'idée de CAUCHY est de trouver un critère de suite convergente sans avoir à connaître la limite.

## Proposition - Condition nécessaire

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est convergente, alors elle vérifie le critère de Cauchy

## Démonstration

## Proposition - Condition suffisante

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  vérifie le critère de Cauchy, alors elle est convergente.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite numérique achevée

4. Segments et compactés

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et principe de dichotomie

4.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité topologique : complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2. ℝ est complet

# Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

La démonstration de la proposition est faite dans l'exercice suivant

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Démonstration

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

La démonstration de la proposition est faite dans l'exercice suivant

## Exercice

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente, converge vers cette même limite.
3. Conclure, en exploitant le théorème de Bolzano-Weiertrass.

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalles réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Méthodes avec les segments
- ⇒ Complétude

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Méthodes avec les segments

- Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Méthodes avec les segments

- ▶ Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- ▶ Fonctions d'intervalles

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Méthodes avec les segments

- ▶ Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- ▶ Fonctions d'intervalles
- ▶ Théorème de Bolzano-Weierstrass

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Méthodes avec les segments

- ▶ Suite de segments de limite nulle, puis principe de dichotomie
- ▶ Fonctions d'intervalles
- ▶ Théorème de Bolzano-Weierstrass
- ▶ Lemme de Cousin et mode d'application

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Méthodes avec les segments
- ⇒ Complétude

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité

3.2. Intervalle réel

3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés

4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie

4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass

4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy

5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Méthodes avec les segments
- ⇒ Complétude

### ► Suite de Cauchy

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboîtés  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Méthodes avec les segments
- ⇒ Complétude

- ▶ Suite de Cauchy
- ▶  $\mathbb{R}$  est complet : une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

1. Problèmes

2. Halo autour de  
 $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet

# Conclusion

⇒ Méthodes  
segments

⇒ Complétude

## Objectifs

- ⇒ Méthodes avec les segments
- ⇒ Complétude

## Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 15 - Divisibilité et congruence sur  $\mathbb{Z}$ .
- ▶ Exercice N°393 & 395

1. Problèmes

2. Halo autour de  $a \in \mathbb{R}$

3. Intervalles et  
connexité

3.1. Connexité  
3.2. Intervalle réel  
3.3. Sur-ensemble : droite  
numérique achevée

4. Segments et  
compacités

4.1. Segments emboités  
4.2. Fonctions d'intervalles et  
principe de dichotomie  
4.3. Théorème de  
Bolzano-Weierstrass  
4.4. Lemme de Cousin

5. Curiosité  
topologique :  
complétude

5.1. Suites de Cauchy  
5.2.  $\mathbb{R}$  est complet