Leçon 50 - Calcul matriciel

18 décembre 2025

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires ? (Méthode du pivot de GAUSS)

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires ? (Méthode du pivot de GAUSS)

Transférer la méthode du pivot de Gauss

Heuristique. Lien résoilution de système/inversion de matrice

Le calcul $A \times X = b$ où X et b sont des matrices colonnes est exactement l'écriture d'un système linéaire.
La résolution $X = A^{-1}b$ (si A est inversible donc carrée) exploite les opérations élémentaires sur les lignes du système pour appliquer l'algorithme de Gauss.
Essayer de transférer directement les mêmes idées sur les lignes (puis les colonnes) de A.

Définition

Définition - Opérations élémentaires sur les lignes

On appelle opération élémentaire sur les lignes L_i de la matrice A l'une des transformations suivantes effectuée sur A :

- **Permutation (ou échange)de deux lignes**
  Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i-ième et la j-ième lignes de la matrice.
- **Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne**
  Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j-ième ligne L_j de la matrice par $L_j + \lambda L_i$, où $\lambda \in K$.
- **Multiplication d'une ligne par un scalaire NON NUL**
  Pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie que l'on remplace la i-ième ligne par αL_i.

Codage matriciel

Chacune des manipulations précédentes correspond à un produit matriciel :

Codage matriciel

Proposition - Transformation élém. sur les lignes (=un produit)

Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est :

- Pour $L_i \leftrightarrow L_j$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

C'est une matrice de transposition, notée habituellement $P_{i,j} (= P_{j,i})$

Codage matriciel

Proposition - Transformation élém. sur les lignes (=un produit)

Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est :

- Pour $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \lambda & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij} \quad \lambda \text{ en ligne } i, \text{ colonne } j$$

C'est une matrice de transvection, notée habituellement $T_{i,j}(\lambda)$

Codage matriciel

Proposition - Transformation élém. sur les lignes (=un produit)

Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est :

- Pour $L_i \leftarrow \alpha L_i$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1) E_{ii}$$

C'est une matrice de dilatation, notée habituellement $D_i(\alpha)$

Codage matriciel

Proposition - Transformation élém. sur les lignes (=un produit)

Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice A revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est :

- Pour $L_i \leftarrow \alpha L_i$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$$

C'est une matrice de dilatation, notée habituellement $D_i(\alpha)$

Démonstration

Opérations élémentaires sur I_n

Proposition - Opération élémentaire en I_n

On considère une opération élémentaire, φ, qui transforme une matrice A en la matrice $\varphi(A)$ et la matrice I_n en $\varphi(I_n)$. Alors $\varphi(A) = \varphi(I_n)A$..

Et par récurrence, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les lignes) qui s'appliquent à des matrices possédant n lignes, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$[\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1](A) = \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A.$$

Opérations élémentaires sur I_n

Proposition - Opération élémentaire en I_n

On considère une opération élémentaire, φ, qui transforme une matrice A en la matrice $\varphi(A)$ et la matrice I_n en $\varphi(I_n)$. Alors $\varphi(A) = \varphi(I_n)A$..
Et par récurrence, si $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les lignes) qui s'appliquent à des matrices possédant n lignes, alors pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$[\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1](A) = \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A.$$

Démonstration

Retenir le codage

Cela se concrétise dans le savoir faire suivant

Retenir le codage

Cela se concrétise dans le savoir faire suivant

Savoir-faire. Retenir les opérations matricielles

Pour une opération sur les lignes de A, il s'agit toujours de produit à gauche de A. Par quelle matrice ?
C'est toujours par la matrice qu'on obtient lorsqu'on applique la transformation élémentaire en question à I_n.
Ainsi, par exemple, si l'on veut faire $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, pour $n = 3$, on multiplie par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Codage fonctionnel

Proposition - Inversibilité des opérations élémentaires

Si une matrice B est déduite de A par une opération élémentaire φ, alors A peut se déduire de B par l'opération inverse φ^{-1} suivant le tableau suivant :

φ	φ^{-1}
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$	$L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$

Opération réciproque

Proposition - Inversibilité des matrices élémentaires

Si φ est une opération élémentaire sur les lignes alors la matrice carrée $\varphi(I_n)$ est inversible et $\varphi(I_n)^{-1} = \varphi^{-1}(I_n)$.
On a alors $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ (symétrique, involutif), $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)$, et $D_i(\alpha) = D_i(\frac{1}{\alpha})$.

Opération réciproque

Proposition - Inversibilité des matrices élémentaires

Si φ est une opération élémentaire sur les lignes alors la matrice carrée $\varphi(I_n)$ est inversible et $\varphi(I_n)^{-1} = \varphi^{-1}(I_n)$.
On a alors $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ (symétrique, involutif), $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)$, et $D_i(\alpha) = D_i(\frac{1}{\alpha})$.

Démonstration

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires ? (Méthode du pivot de GAUSS)

Petit détour : point de vue sur les colonnes

On définit les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes que sur les lignes. On obtient alors les résultats suivants :

Petit détour : point de vue sur les colonnes

On définit les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes que sur les lignes. On obtient alors les résultats suivants :

Proposition - Transformation élémentaire sur les colonnes comme un produit

Effectuer une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ revient à calculer le produit matriciel AF où F est l'une des matrices suivantes :

- Pour $C_i \leftrightarrow C_j$: $F = I_p - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
- Pour $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: $F = I_p + \lambda E_{ji}$
- Pour $C_i \leftarrow \alpha C_i$: $F = I_p + (\alpha - 1)E_{ii}$

Petit détour : point de vue sur les colonnes

On définit les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes que sur les lignes. On obtient alors les résultats suivants :

Proposition - Transformation élémentaire sur les colonnes comme un produit

Effectuer une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ revient à calculer le produit matriciel AF où F est l'une des matrices suivantes :

- Pour $C_i \leftrightarrow C_j$: $F = I_p - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
- Pour $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$: $F = I_p + \lambda E_{ji}$
- Pour $C_i \leftarrow \alpha C_i$: $F = I_p + (\alpha - 1) E_{ii}$

Démonstration

Application à I_p

Proposition - Opération élémentaire en I_p

On considère une opération élémentaire, notée ψ, qui transforme une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ en la matrice $\psi(A) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et la matrice I_p en $\psi(I_p)$. Alors

$$\psi(A) = A\psi(I_p).$$

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires ? (Méthode du pivot de GAUSS)

Conservation de l'inversibilité par produit à gauche

Proposition - Conservation de l'inversibilité

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Conservation de l'inversibilité par produit à gauche

Proposition - Conservation de l'inversibilité

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Démonstration

Conservation de l'inversibilité par produit à gauche

Proposition - Conservation de l'inversibilité

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Démonstration

Corollaire - Conservation d'inversibilité par les opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) d'une matrice carrée conservent le caractère inversible/non inversible d'une matrice.

Conservation de l'inversibilité par produit à gauche

Proposition - Conservation de l'inversibilité

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Démonstration

Corollaire - Conservation d'inversibilité par les opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) d'une matrice carrée conservent le caractère inversible/non inversible d'une matrice.

Démonstration

Algorithme

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

Algorithme

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

1. On commence par un lemme que l'on démontre

Algorithme

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

1. On commence par un lemme que l'on démontre
2. Puis on l'applique au matrices triangulaires supérieures

Algorithme

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

1. On commence par un lemme que l'on démontre
2. Puis on l'applique au matrices triangulaires supérieures
3. Enfin, on fait la démonstration générale.

Algorithme - Lemme

Lemme - Trigonalisation

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-s,s} & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ($s \in \mathbb{N}_n$ quelconque) et $C \in \mathcal{M}_{n-s}(\mathbb{K})$, alors :

- ou bien $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$, ${}^{i}[C]_1 = 0$ et alors M n'est pas inversible
- ou bien $\exists\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$, tel que ${}^{i}[C]_1 \neq 0$, alors $\exists\ T$ produit de matrices élémentaires telle que

$$T \times M = \left(\begin{array}{c|cc} A & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline & x & \\ & 0 & \\ O_{n-s,s} & \vdots & C' \\ & 0 & \end{array}\right) \text{ avec } x \neq 0$$

Algorithme - Lemme

Lemme - Trigonalisation

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{n-s,s} & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ($s \in \mathbb{N}_n$ quelconque) et $C \in \mathcal{M}_{n-s}(\mathbb{K})$, alors :

- ou bien $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$, ${}^{i}[C]_1 = 0$ et alors M n'est pas inversible
- ou bien $\exists\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$, tel que ${}^{i}[C]_1 \neq 0$, alors $\exists\ T$ produit de matrices élémentaires telle que

$$T \times M = \left(\begin{array}{c|cc} A & B & \\ \hline & x & \\ O_{n-s,s} & 0 & \\ & \vdots & C' \\ & 0 & \end{array}\right) \text{ avec } x \neq 0$$

Démonstration

Etude des matrices triangulaires supérieures (cas inversibles)

Théorème -Inverse d'une matrice triangulaire supérieure

Soit T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale.
Alors il existe T' triangulaire supérieure et inversible telle que $T' \times T = I_n$.
Réciproquement, si T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure, avec (au moins) un coefficient non nuls sur la diagonale, alors T n'est pas inversible.

Etude des matrices triangulaires supérieures (cas inversibles)

Théorème -Inverse d'une matrice triangulaire supérieure

Soit T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale.
Alors il existe T' triangulaire supérieure et inversible telle que $T' \times T = I_n$.
Réciproquement, si T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure, avec (au moins) un coefficient non nuls sur la diagonale, alors T n'est pas inversible.

Démonstration

Algorithme

Souvent, les démonstrations par récurrence, si elles sont constructives, permettent d'écrire un algorithme (récursif, en particulier). Comme toute matrice échelonnée est triangulaire supérieure, on peut terminer l'algorithme de Gauss.

Algorithme

Souvent, les démonstrations par récurrence, si elles sont constructives, permettent d'écrire un algorithme (récursif, en particulier). Comme toute matrice échelonnée est triangulaire supérieure, on peut terminer l'algorithme de Gauss.

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

Algorithme

Souvent, les démonstrations par récurrence, si elles sont constructives, permettent d'écrire un algorithme (récursif, en particulier). Comme toute matrice échelonnée est triangulaire supérieure, on peut terminer l'algorithme de Gauss.

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

Démonstration

Algorithme

Souvent, les démonstrations par récurrence, si elles sont constructives, permettent d'écrire un algorithme (récursif, en particulier). Comme toute matrice échelonnée est triangulaire supérieure, on peut terminer l'algorithme de Gauss.

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la transformation de A vers I_n, par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

Démonstration

On peut enfin démontrer l'algorithme de Gauss.

Démonstration

Encore quelques remarques…

Remarque Et les colonnes ?

Encore quelques remarques…

Remarque Et les colonnes ?

Attention. Surtout pas !

Mais en revanche il ne faut surtout **pas mélanger les deux types d'opérations** car l'on aboutit à $E_m E_{m-1} \dots E_1 A F_1 \dots F_p = I_n$ qui n'est pas de la forme $AB = I_n$ et ne permet pas de conclure à l'inversibilité de A.
Mais néanmoins, comme souvent, rien n'est perdu dans ce cas là : on montrera que A est équivalente à I_n, donc de même rang : n, donc elle est inversible…

Résultat important :

Corollaire - Inversion à droite suffisante

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.
Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
(De même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Résultat important :

Corollaire - Inversion à droite suffisante

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.
Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
(De même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Inversibilité et inverse d'une matrice par l'algorithme de Gauss

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_2 \end{array} \right.$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.

Savoir-faire

Savoir-faire. Inversibilité et inverse d'une matrice par l'algorithme de Gauss

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_2 \end{array}\right.$$

Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1}, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercice

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercice

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque Et si A n'est pas inversible ?

Exercices

<u>Exercice</u>

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque Et si A n'est pas inversible ?

<u>Exercice</u>

Déterminer les inverses de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

- Trois types : permutations, transvections et dilatations.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

- Trois types : permutations, transvections et dilatations.
- Chacune de ces opérations est un produit à gauche sur A à partir de trois familles de matrices

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

- Trois types : permutations, transvections et dilatations.
- Chacune de ces opérations est un produit à gauche sur A à partir de trois familles de matrices
- ...et ces matrices sont exactement celles obtenues en appliquant l'opération élémentaire en question sur I_n

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

- Trois types : permutations, transvections et dilatations.
- Chacune de ces opérations est un produit à gauche sur A à partir de trois familles de matrices
- ...et ces matrices sont exactement celles obtenues en appliquant l'opération élémentaire en question sur I_n
- On construit la même organisation sur les colonnes des matrices (produit à droite).

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

- On transforme A en matrice échelonné A'

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

- On transforme A en matrice échelonné A'
- On regarde si A' est inversible.

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

- On transforme A en matrice échelonné A'
- On regarde si A' est inversible.
- Si oui, on transforme A' est I_n, on trouve alors A^{-1}...

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

⇒ Opérations élémentaires

⇒ Méthode du pivot

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Conclusion

Objectifs

⇒ Opérations élémentaires (qu'est-ce ?)

⇒ Comment bien s'organiser pour gérer les opérations élémentaires

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : Anneaux et corps
- Exercice n°126 & 128 (inspiré du 135)