Leçon 42 - Questions topologiques interprétées sur $\mathbb{R}$

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Problèmes

Problème - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

Problèmes

Problème - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

Problème - Voisinage

Problèmes

Problème - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

Problème - Voisinage

Problème - Pas de trou

Problèmes

Problème - Extension aux suites de la propriété de la borne supérieure.

Problème - Voisinage

Problème - Pas de trou

Problème - Principe de dichotomie

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Voisinage

Heuristique. Exemple de limite de suites

On a vu que pour les suites il y a deux formalismes différents selon qu'elle converge vers un nombre ℓ ou diverge vers l'infini :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

$$\forall\ A > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, u_n > A$$

- $n \geqslant N$, correspond à un certain voisinage entiers de $+\infty$,
- $\forall\ A, \cdots > A$ à l'ensemble des voisinages réels de $+\infty$
- $\forall\ \epsilon > 0, |\cdots - \ell| < \epsilon$ à l'ensemble des voisinage de ℓ.

Il est préférable d'unifier en une notation ces différents types de voisinage.

Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de a.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de a.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple $[2,3] \cup]4,6[$

Voisinage autour d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition - Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset V$.
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$
$V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, B] \subset V$
Une propriété est dite vraie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
si elle est vraie sur un voisinage de a.
On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple $[2,3] \cup]4,6[$

Remarque Voisinage avec des ouverts

Stabilité pour des intervalles

Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage V de a (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a (non vide) :
$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$
- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* a.

Stabilité pour des intervalles

Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage V de a (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a (non vide) :

$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$

- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* a.

Demonstration

Stabilité pour des intervalles

Proposition - Stabilité de voisinage par intersection

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{-\infty, +\infty\}$ (i.e. $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

- Pour tout voisinage V de a (i.e. $V \in \mathcal{V}_a$), $a \in V$.
- Si $V \in \mathcal{V}_a$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}_a$.
- L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a (non vide) :

$$\forall\ V_1, V_2 \in \mathcal{V}_a,\ V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_a.$$

- $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} = \{a\}$ (borne inférieure...) - *qui n'est pas un voisinage de* a.

Demonstration

Exercice

Soient ℓ_1, $\ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :

Si $\forall\ V \in \mathcal{V}_{\ell_1}$, $\ell_2 \in V$ (i.e $V \in \mathcal{V}_{\ell_2}$), alors $\ell_1 = \ell_2$.

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

Définition - Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point intérieur de A, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$.
Ou encore si A est un voisinage de a. On note alors $a \in \mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de A.

Intérieur

Pour nous, le but des définitions qui suivront est de donner le vocabulaire le plus adaptée aux questions qui se poseront pour définir avec précision la continuité (mais aussi la dérivabilité) des fonctions numériques.

Définition - Point intérieur à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point intérieur de A, si il existe $\epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \subset A$.
Ou encore si A est un voisinage de a. On note alors $a \in \mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est l'ensemble des points intérieurs de A.

Exemple. Cas d'un intervalle semi-ouvert

Stabilité

Propostion - Stabilité

Soit A_1, A_2 deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.

Stabilité

Propostion - Stabilité

Soit A_1, A_2 deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\mathring{A}_1 \subset \mathring{A}_2$.

Démonstration

Adhérence

Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Adhérence

Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

Adhérence

Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Attention. Ne pas confondre. . .

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

Exemple Cas d'un intervalle semi-ouvert

Adhérence

Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

Exemple Cas d'un intervalle semi-ouvert

Proposition - Stabilité

Soit A_1, A_2 deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

Adhérence

Définition - Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que a est un point adhérant de A, si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A \neq \emptyset$.
On note alors $a \in \overline{A}$.
$\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents de A.

Attention. Ne pas confondre...

Point adhérent à une partie et valeur d'adhérence d'une suite.

Exemple Cas d'un intervalle semi-ouvert

Proposition - Stabilité

Soit A_1, A_2 deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A_1 \subset A_2$.
Alors $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$.

Démonstration

Point d’accumulation

On a parfois besoin d’une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Définition - Point d'accumulation

On dit que a est un point d'accumulation de A
si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\Big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\Big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit a est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Définition - Point d'accumulation

On dit que a est un point d'accumulation de A

si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Autrement écrit a est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Remarque. Points isolés

Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Définition - Point d'accumulation

On dit que a est un point d'accumulation de A

si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.

Autrement écrit a est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Remarque. Points isolés

Exemple. Point d'accumulation de $A = \{0\} \cup [1, 4[$

Point d'accumulation

On a parfois besoin d'une suite convergente vers a, tout en étant différente de a.

Définition - Point d'accumulation

On dit que a est un point d'accumulation de A
si $\forall\ \epsilon > 0$ tel que $\Big[[a-\epsilon, a+\epsilon] \cap A\Big] \setminus \{a\} \neq \emptyset$.
Autrement écrit a est un point d'accumulation ssi $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

Remarque. Points isolés
Exemple. Point d'accumulation de $A = \{0\} \cup [1, 4[$
Exercice
Montrer que si a est un point d'accumulation, alors dans chaque voisinage de a, il existe une infinité de points de A.

Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de A, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A}$ a un sens.

Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A, x \neq a}$ a un sens.

Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de A, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A}$ a un sens.

Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A, x \neq a}$ a un sens.

Proposition - Suite convergente d'éléments de A

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$

a est adhérent à A si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim(a_n)$.

Les points adhérents de A sont toutes les limites possibles d'éléments de A.

Suite convergente

Les points adhérents sont les points que l'on peut approcher par des points de A, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A}$ a un sens.

Les points d'accumulation sont les points que l'on peut approcher par des points de $A \setminus \{a\}$, ou encore pour lesquels la question du calcul de $\lim\limits_{x \to a, x \in A, x \neq a}$ a un sens.

Proposition - Suite convergente d'éléments de A

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in A$

a est adhérent à A si et seulement si il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $a = \lim(a_n)$.

Les points adhérents de A sont toutes les limites possibles d'éléments de A.

Démonstration

Complément sur la borne supérieure (inférieure)

Proposition - Borne supérieure

Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de X.
$M \in \overline{X}$ (M est adhérent de X). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à X : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de X qui converge vers M.

Complément sur la borne supérieure (inférieure)

Proposition - Borne supérieure

Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de X.
$M \in \overline{X}$ (M est adhérent de X). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à X : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de X qui converge vers M.

Exercice

Donner la caractérisation équivalente pour $m = \inf X$

Complément sur la borne supérieure (inférieure)

Proposition - Borne supérieure

Soit X une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit M un majorant de X.
$M \in \overline{X}$ (M est adhérent de X). Plus précisément, c'est le seul majorant adhérent à X : Alors $M = \sup X$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de X qui converge vers M.

Exercice
Donner la caractérisation équivalente pour $m = \inf X$

Démonstration

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque Rappel de la définition de la densité

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque Rappel de la définition de la densité

Proposition - Densité

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de X.)

ssi pour tout a réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque Rappel de la définition de la densité

Proposition - Densité

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de X.)

ssi pour tout a réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

Démonstration

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque Rappel de la définition de la densité

Proposition - Densité

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de X.)

ssi pour tout a réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

Démonstration

Proposition - Densité des rationnels dans $\mathbb{R}$

La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que :
tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Densité dans $\mathbb{R}$

Remarque Rappel de la définition de la densité

Proposition - Densité

Une partie X de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$

ssi $\overline{X} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est égal à l'adhérence de X.)

ssi pour tout a réel il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a$.

Démonstration

Proposition - Densité des rationnels dans $\mathbb{R}$

La densité des rationnels dans $\mathbb{R}$ permet d'affirmer que :
tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Remarque On a mieux encore. . .

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Ensemble (non) séparé

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Ensemble (non) séparé

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition - Ensemble séparé

Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit A et B sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de A n'est dans l'adhérence de B, aucun point de B n'est dans l'adhérence de A.

Ensemble (non) séparé

Le but est donné un nom propre aux ensembles « continues », i.e. sans trou afin d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition - Ensemble séparé

Soient A et B, deux parties de $\mathbb{R}$.
On dit A et B sont séparés si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap B = \emptyset$.
Aucun point de A n'est dans l'adhérence de B, aucun point de B n'est dans l'adhérence de A.

Exemple Cas de $A =]0,1[$ et $B =]1,2]$ ou $B = [1,2]$

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Exemple Réunion d'intervalles

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Exemple Réunion d'intervalles

Exercice

Faire la démonstration de $[0, 4]$ est connexe.

Ensemble connexe

Définition - Ensemble connexe

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que E est connexe, si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux sous-ensembles séparés non vide.

Exemple Réunion d'intervalles

Exercice

Faire la démonstration de $[0, 4]$ est connexe.
La méthode s'adapte à tout intervalle. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, tous les intervalles (même ouverts) sont connexes.

Savoir-faire. Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe

La méthode consiste souvent à faire un raisonnement par l'absurde et à travailler à partir du nombre x_0 qui est obtenu comme borne supérieure d'un ensemble A (à inventer) et élément de B ou bien élément de A et borne inférieure de B.
A partir de ce x_0, trouver une contradiction.

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Intervalles

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\ x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).
On notera, ensuite, plus simplement $[x, y]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

Intervalles

Définition - Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si il vérifie :

$$\forall\ x < y \in I, \qquad \{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\} \subset I$$

(I est une partie convexe de $\mathbb{R}$).
On notera, ensuite, plus simplement $[x, y]$ l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leqslant t \leqslant y\}$ dont il est question dans la définition.

Exemple Ensemble des majorants d'une partie majorée

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a<b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation $"(","")" \in \{"[","]"\}$.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a < b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "$($", "$)$" $\in$ {"$[$", "$]$"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

Démonstration

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a, b), avec $a < b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(",")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a, b[\subset I \subset [a, b]$.

Démonstration
On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si X est un connexe de $\mathbb{R}$, alors X est un intervalle.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Proposition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de la forme (a,b), avec $a<b$ et $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Par notation "(",")" $\in$ {"[","]"}.
Ce qui revient au même que de montrer qu'il existe $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$.

Démonstration
On a vu que dans $\mathbb{R}$, les intervalles étaient connexes. La réciproque est vraie .

Proposition - Les connexes de $\mathbb{R}$

Si X est un connexe de $\mathbb{R}$, alors X est un intervalle.

Démonstration

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Achevons $\mathbb{R}$

Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de* $\overline{\mathbb{R}}$ *admet une borne supérieure*

Achevons $\mathbb{R}$

Heuristique. Donner une borne supérieure à une partie non majorée

Cela correspond à donner une borne supérieure : $+\infty$ à une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et une borne inférieure : $-\infty$ à une partie non minorée de $\mathbb{R}$.
Cela permet d'écrire certaines propriétés de manière plus simple en différenciant moins de cas.
Par exemple, le théorème fondamental n'est plus : *toute partie bornée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure*, mais il devient *toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure*

Définition - Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On définit : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$
et on prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leqslant +\infty \text{ et } x \geqslant -\infty.$$

Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty$, $0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Le coût

Attention. Mais il y a un coût. . .

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty, 0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

Le coût

Attention. Mais il y a un coût...

Il est difficile d'étendre les opérations $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sans aboutir à des incohérences ;
pour « $0 \times +\infty, 0 \times -\infty$ et $(+\infty) + (-\infty)$ ».

Ce que l'on gagne :

Proposition - Existence de la borne supérieure

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure

Démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection...
- Points intérieurs, points adhérent, point isolé, point d'accumulation

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

- Définition de voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ ou de $+\infty$, $-\infty$
- Stabilité par réunion, intersection...
- Points intérieurs, points adhérent, point isolé, point d'accumulation
- Ré-interprétation de borne supérieure/inférieure ou de densité en terme de limite de suites.

Conclusion

Objectifs

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Conclusion

Objectifs

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Voisinage et débordement

$\Rightarrow$ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable
- Dans $\mathbb{R}$: les intervalles !

Conclusion

Objectifs

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

- Ensemble connexe : ensemble non séparable
- Dans $\mathbb{R}$: les intervalles !
- L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Voisinage et débordement

⇒ Connexité et intervalles

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 19 - Topologie réelle
  4. Segment & 5. Complétude
- Exercices : N° 386 & 391