



⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Leçon 59 - Continuité

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Bilan : prolongement

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Savoir-faire. Définir f (continue) de X à $\overline{X}$

Si f est définie sur un ensemble X , la continuité de f peut permettre d'étendre f sur $\overline{X}$.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Définition

Définition - Prolongement par continuité

Soit I un intervalle.

- ▶ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 une extrémité réelle de I , $x_0 \notin I$.
Si f admet une limite réelle ℓ en x_0 , alors la fonction $\bar{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par
$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \bar{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$
 prolonge f à $I \cup \{x_0\}$ et est continue en x_0 .
- ▶ Si $x_0 \in I$, si f définie sur $I \setminus \{x_0\}$ admet des limites réelles à droite et à gauche en x_0 et si ces limites sont égales (à ℓ) alors la fonction $\bar{f}$ définie sur I par
$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0; \\ \bar{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$
 prolonge f à I et est continue en x_0 .

Dans les deux cas $\bar{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

$\Rightarrow$ Continuité, prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

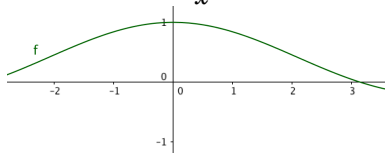
3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Exemple

Exemple $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$



La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Remarque

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Sur le vocabulaire

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

**3.2. Prolongement par
continuité**

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Remarque

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Remarque Sur le vocabulaire

Exercice

Montrer que la fonction $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est prolongeable par continuité en 0.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Savoir-faire

Savoir-faire. Démontrer la continuité de f sur I ou prolonger la continuité de f sur I

Dans les deux cas, la méthode est la même :

1. On s'assure, par les théorèmes généraux, que f est continue sur I sauf en un point x_0 particulier.
2. Puis, on regarde la limite de f en x_0 .
 - ▶ Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, alors $f(x_0)$ existe. Il s'agit de démontrer la continuité de f en x_0 .
 - ▶ Si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, alors $f(x_0)$ n'existe pas (ou pas encore). Il s'agit de voir si on peut ajouter un point x_0 dans l'ensemble de définition de f . De manière à ce que f reste continue. On dit que l'on fait un prolongement par continuité de f .

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Le théorème

C'est un théorème de surjectivité. L'hypothèse est simple : la continuité de f .

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Le théorème

C'est un théorème de surjectivité. L'hypothèse est simple : la continuité de f .

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. On suppose que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Le théorème

C'est un théorème de surjectivité. L'hypothèse est simple : la continuité de f .

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. On suppose que $f(a) \times f(b) \leq 0$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Autre énoncé

Corollaire - TVI entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soient a et b deux réels, $(a, b) \in I^2$ et $a < b$. Alors pour toute valeur d comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $t \in [a, b]$ tel que $f(t) = d$.

Démonstration

Corollaire - Image d'un intervalle par une fonction continue

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Exercice

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe. Exercice

Supposons que f continue et ne s'annule pas. Donc pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \neq 0$.

Soit $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \alpha(t) > 0$, tel que

$$f([t - \alpha(t), t + \alpha(t)]) \subset [f(t) - \epsilon, f(t) + \epsilon] \text{ avec } \epsilon = \left| \frac{f(t)}{2} \right|.$$

En appliquant le lemme de Cousin, montrer que f est de signe constant. Conclure.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Remarque - Mieux ($f(K)$ avec K compact).

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Heuristique - Deux résultats !

Il y a en fait deux parties dans ce théorème :

- ▶ $f([a, b])$ est borné. C'est l'existence de $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$.
- ▶ Cette borne supérieure est atteinte : $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$

La démonstration se fera également en deux temps (avec le principe de dichotomie).

On notera que pour cette démonstration, on exploite de deux façons distinctes ce principe : une fois par l'absurde (méthode ascendante et globale), une fois pour exhiber un nombre en particulier (méthode descendante et locale).

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 \mid f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Démonstration

(Avec le processus de dichotomie)

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Démonstrations

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de BW.

- Supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.
En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- On considère alors $M = \sup f$. Montrer qu'il existe $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(y_n) \rightarrow M$.
Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

$\Rightarrow$ Continuité, prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Démonstrations

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du théorème de BW.

- Supposons que f n'est pas bornée sur $[a, b]$.
Montrer qu'il existe $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(x_n) \rightarrow +\infty$.
En déduire une contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- On considère alors $M = \sup f$. Montrer qu'il existe $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que $f(y_n) \rightarrow M$.
Conclure avec le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice

Démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide du lemme de Cousin.

L'existence d'un maximum est facile dans le cas d'un ensemble fini. En prenant un jauge puis une subdivision pointée bien choisies, on peut réduire à la recherche d'un maximum pour un nombre fini de points

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Image d'un segment

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Image d'un segment

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est un corollaire du théorème précédent.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Image d'un segment

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

Théorème - Image d'un segment par une fonction continue

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ (image directe du segment) est un segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration

C'est un corollaire du théorème précédent.

Exercice

Montrer qu'une fonction périodique, continue sur $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Montrer l'existence d'un point x tel que...

Plusieurs possibilités :

- ▶ Théorème des valeurs intermédiaires
- ▶ Théorème de Weierstrass
- ▶ Principe de dichotomie
- ▶ Principe de convergence monotone ou borne supérieure
- ▶ Théorème de Bolzano-Weierstrass (limite de la suite extraite)
- ▶ Théorème de Cauchy (espace complet)
- ▶ Théorème de Rolle (ou E.A.F.)

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Exercice

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) < \alpha$.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \alpha - \epsilon$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Exercices

Exercice

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) < \alpha$.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq \alpha - \epsilon$.

Exercice

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], [a, b])$ telle que $\forall x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe, noté x_0
2. Soit (u_n) tel que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n) \rightarrow x_0$.

$\Rightarrow$ Continuité,
prolongement...

$\Rightarrow$ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Continuité, prolongement. . .
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .
- ▶ Vérifications de la continuité : fonctions usuelles ou passage à la limite

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement. . .

- ▶ f est continue sur I , si f est continue en tout point de I .
- ▶ Vérifications de la continuité : fonctions usuelles ou passage à la limite
- ▶ Prolongement, PAR continuité.
On ajoute à $\mathcal{D}_f = I$ un point x de sorte que $f(x)$ (ajouté) rende f continue en x également.

⇒ Continuité, prolongement. . .

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3.TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Continuité, prolongement. . .
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

⇒ Continuité,
prolongement...

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle
- ▶ Weierstrass : L'image d'un segment par une fonction continue, est un segment (f atteint ses bornes sur $[a, b]$)

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

- ▶ V1 : Si f continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
- ▶ V2 : Si f continue sur $[a, b]$ alors $\forall d \in [a, b], \exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.
- ▶ V3 : L'image d'un intervalle est un intervalle
- ▶ Weierstrass : L'image d'un segment par une fonction continue, est un segment (f atteint ses bornes sur $[a, b]$)
- ▶ - Théorème de la bijection : Si f est continue, alors f est injective ssi f est strictement monotone.

⇒ Continuité, prolongement...

⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires...

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Continuité, prolongement. . .
- ⇒ Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires. . .

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 11 : Continuité
Fin du chapitre.
- ▶ Exercice N° 411 & 416
- ▶ TD jeudi : 8h-10h : 408, 410, 413, 417, 420
10h-12h : 409, 412, 414, 418, 421

⇒ Continuité,
prolongement. . .

⇒ Théorème des
valeurs
intermédiaires et
corollaires. . .

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$