CPGE MPSI — Le 24.05.17

2016-2017

Devoir Surveillé n°10

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et un problème.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice

1. Laquelle des deux suites $(\frac{e^{-2n}}{n})$ et $(\frac{1}{n^2})$ domine l'autre ?
2. On considère $u_n = [\mathrm{ch}(n)]^{1/n} - e$.
   Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.
3. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Interdiction de tourner la page sans l'autorisation explicite du professeur !

Problème

Dans tout le problème, on fixe un intervalle fini $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et strictement positive.

Pour toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

I. Quadrature

Pour tout entier positif n, on note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace des polynômes de degré strictement inférieur à n.

Dans cette partie, on fixe n points $x_1,\ldots,x_n$ deux à deux distincts de I.

1. Rappeler la dimension de l'espace E.
2. A chaque $x \in I$, on associe la forme linéaire $\epsilon_x : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \epsilon_x(P) = P(x).$$

   Montrer que $(\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n})$ est une base de l'espace dual $E^*\big(= (\mathbb{R}_{n-1}[X])^*\big)$ (i.e. l'espace des formes linéaires définies sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$).
3. En déduire qu'il existe des réels $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ (dépendant seulement des points x_i) tels que :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \mathcal{I}(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) \qquad (*)$$

   Par la formule $(*)$ précédente, on peut s'attendre à ce que pour n grand la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ soit une bonne approximation numérique de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$, d'où le terme de quadrature. Le but de ce problème est de justifier cette approximation et d'optimiser le choix des points x_i.

II. Polynômes orthogonaux

On note $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'espace $\mathbb{C}^0(I; \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On identifie $E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ à $E_n^{\mathcal{C}} = \{f \in \mathcal{C} \mid \exists\ P \in E_n \mid \forall\ t \in [a, b], f(t) = P(t)\}$ l'espace des fonctions polyomiales de degré $< n$. $E_n^{\mathcal{C}} \equiv E_n$ est un sev de $\mathcal{C}$.

1. Montrer que la formule

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

   définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$. On note $\|\cdot\|_\omega$ la norme associée.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :
      i) pour tout entier positif i, P_i est unitaire de degré i.
      ii) pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\langle P_i, P_j\rangle_\omega = 0$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in N$, la famille $(P_0, ..., P_{n-1})$ forme une base de E_n.
   (c) En déduire que pour tout $m \geqslant n$, $P_m \in E_n^\perp$
3. Le but de cette question est de montrer que pour tout entier n le polynôme P_n précédent a n racines distinctes dans l'intervalle I.
   Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose que n'est pas le cas et l'on note $y_1, \ldots,$ y_k les racines de P_n situées dans I qui sont de multiplicité impaire. Soit enfin le polynôme

$$L = \prod_{i=1}^{k}(X - y_i).$$

   (a) Justifier que $k < n$.
   (b) Montrer que la fonction $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto P_n(t)L(t)$ ne change pas de signe.
   (c) En considérant $\langle P_n, L\rangle_\omega$, aboutir à une contradiction.
4. (a) Montrer que pour toute fonction $Q \in \mathcal{C}$

$$\langle XP_n, Q\rangle_\omega = \langle P_n, XQ\rangle_\omega$$

(b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, il existe des réels α_n et β_n tel que :

$$XP_n = P_{n+1} + \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1}$$

Montrer que

$$\alpha_n = \frac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega^2} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{\|P_n\|_\omega^2}{\|P_{n-1}\|_\omega^2}$$

III. Quadrature de Gauss

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. On note $y_1, \ldots y_n$ les racines de P_n.

1. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout polynôme Q de degré $< 2n$, on ait :

$$\mathcal{I}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(y_i)$$

Indication : On pourra faire la division euclidienne de Q par P_n et exploiter (*)

2. Montrer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les identités

$$\lambda_j = \mathcal{I}\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{X - y_i}{y_j - y_i}\right) = \mathcal{I}\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{(X - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}\right)$$

En déduire que $\lambda_j > 0$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$.

4. Pour tout $g : I \to \mathbb{R}$, on pose :

$$S_n(g) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(y_i).$$

On veut montrer que pour f fixée dans $\mathcal{C}$,

$$S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(f).$$

(a) On admet, ici, un théorème de Weierstrass :

> **Théorème de (Stone-)Weierstrass :**
> Soit $[u, v]$, segment de $\mathbb{R}$ (interalle de $\mathbb{R}$, fermé et borné),
> Toute fonction ϕ continue sur $[u, v]$ est approchée uniformément par les fonctions polynomiales

Traduire ce théorème mathématiquement avec des quantificateurs, ϵ et sup...
On pourra comparer la situation au théorème qui annonce une approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par l'ensemble des fonctions en escalier.

(b) Soit $\epsilon > 0$.
Déduire de la question précédente l'existence de P tel que $\forall\ t \in [a, b]$, $|f(t) - P(t)| < \epsilon$

(c) Montrer que pour $n > \deg(P)$, on a :

$$|\mathcal{I}(f) - S_n(f)| \leqslant 2\epsilon \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$$

(d) Conclure

IV. Application

Supposons que l'on cherche à calculer $\mathfrak{I} = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que par un changement de variable affine, on peut ramener le calcul de I à celui d'une intégrale sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2. On se place donc dans la situation $I = [a, b] = [-1, 1]$ et $\omega : t \mapsto 1$.
   On note L_i les polynômes définis comme les polynômes P_i de partie II, appelés polynôme de LEGENDRE.
   Ils vérifient en particulier

   i) pour tout entier positif i, L_i est unitaire de degré i.

   ii) pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\langle L_i, L_j \rangle_\omega = \displaystyle\int_{-1}^{1} L_i(t)L_j(t)\mathrm{d}t = 0$.

   iii) la relation de récurrence :

$$L_{n+1} = XL_n - \alpha_n L_n - \beta_n L_{n-1}, \text{ avec } \alpha_n = \frac{\langle XL_n, L_n\rangle_\omega}{\|L_n\|_\omega^2}, \beta_n = \frac{\|L_n\|_\omega^2}{\|L_{n-1}\|_\omega^2}$$

   Donner les expressions des 4 premiers polynômes de Legendre qui forment la base orthonormée unitaire pour le $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1_{|[-1,1]}}$.
   On trouvera $L_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$

3. On cherche à calculer une approximation de $\mathfrak{I}$ avec les racines de L_3.
   (a) Donner la valeur des racines de L_3 et les poids λ_i correspondant à la méthode de quadrature.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 - 3x^4 + x^2 - 1)\mathrm{d}x$ par la méthode usuelle et par la méthode de quadrature de Gauss.
   (c) Quelle valeur approchée proposer pour $\displaystyle\int_0^1 e^t \mathrm{d}t$?