



Leçon 60 - Continuité

21 janvier 2026

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

Démonstration

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Théorème - Injectivité et monotonie stricte

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Démonstration

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$), alors f est bijective de I sur $J = f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J , de même sens de variations que f .

Démonstration

Remarque Un théorème supplémentaire

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Définition

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Définition - Fonction uniformément continue

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est uniformément continue sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.

A comparer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I \exists \eta > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Très important !

Attention. Différence entre continuité et uniforme continuité

La différence avec la définition de la continuité en x est que le réel η est le même pour tout $x \in I$.

A comparer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I \exists \eta > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Attention. Ordre des quantificateurs

Insistons un peu... L'ordre des quantificateurs est important :

► $\exists \dots \forall \dots \neq \forall \dots \exists \dots$

► $\exists \dots_1 \exists \dots_2 = \exists \dots_2 \exists \dots_1$ et $\forall \dots_1 \forall \dots_2 = \forall \dots_2 \forall \dots_1$

Implication...

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Implication...

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Proposition - Implication

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I .

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

Remarque - Faire un schéma de la démonstration !

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Il existe une réciproque, dans le cadre des fonctions définie sur un segment. C'est le théorème de Heine :

Théorème - Théorème de Heine

Une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment.

Remarque - Démonstration

Remarque - Faire un schéma de la démonstration !

Démonstration (Lemme de Cousin)

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Remarques sur la démonstration

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Remarque Commentaires sur la démonstration

► f est continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta(y) \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

► f est uniformément continue sur I , si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \mid \forall x \in I, |y - x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Exercices : autres démonstrations

Exercice : A démontrer avec la dichotomie

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\epsilon > 0$. On note pour $\alpha < \beta \in [a, b]$,

$G(\alpha, \beta) = 0$ si $\exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in [\alpha, \beta], |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

et $G(\alpha, \beta) = 1$, sinon.

1. Montrer que G est sous-additive (on pourra utiliser la continuité en β)
2. Montrer que si $G(\alpha, b) = 1$, on a une contradiction.
3. En déduire que f est uniformément continue sur $[a, b]$

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Exercices : autres démonstrations

Exercice : A démontrer avec la dichotomie

Soit f continue sur $[a, b]$ et $\epsilon > 0$. On note pour $\alpha < \beta \in [a, b]$,

$G(\alpha, \beta) = 0$ si $\exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in [\alpha, \beta], |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

et $G(\alpha, \beta) = 1$, sinon.

1. Montrer que G est sous-additive (on pourra utiliser la continuité en β)
2. Montrer que si $G(\alpha, b) = 1$, on a une contradiction.
3. En déduire que f est uniformément continue sur $[a, b]$

Exercice : A démontrer avec Bolzano-Weierstrass

On considère f continue sur $[a, b]$ et par l'absurde, on suppose que f n'est pas uniformément continue.

1. Formaliser cette hypothèse. On considérera un tel ϵ .
2. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) de $[a, b]$ telles que $(x_n - y_n) \rightarrow 0$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$
3. Aboutir à une contradiction en exploitant le théorème de Bolzano-Weierstrass

$\Rightarrow$ Uniforme continuité

$\Rightarrow$ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Exercice

1. Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I .
Montrer que sinus est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$).
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Définitions classiques

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

Définition - Transformations classiques

A partir de $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les applications suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}$:

- $|f|$ (module de f) : $\forall x \in X, |f|(x) = |f(x)|$
- $\mathbf{Re}f$ (partie réelle de f) : $\forall x \in X, (\mathbf{Re}f)(x) = \mathbf{Re}(f(x))$
- $\mathbf{Im}f$ (partie imaginaire de f) : $\forall x \in X, (\mathbf{Im}f)(x) = \mathbf{Im}(f(x))$

On définit également $\overline{f}$, fonction conjuguée de f , à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $\forall x \in X, \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées

On dit que $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est bornée si la fonction $|f| \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq M.$$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Définition - Fonctions à valeurs complexes bornées

On dit que $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est bornée si la fonction $|f| \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est majorée, c'est-à-dire si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq M.$$

Attention. Majoration dans $\mathbb{C}$

Dire qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est majorée, ou minorée, n'a pas de sens.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Proposition - Stabilité pour fonctions bornées

$f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est bornée si et seulement si **Re** f et **Im** f
($\in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$) sont bornées.

Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions
bornées sont des fonctions bornées.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Proposition - Stabilité pour fonctions bornées

$f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est bornée si et seulement si **Re** f et **Im** f
($\in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$) sont bornées.

Toute combinaison linéaire et tout produit de deux fonctions
bornées sont des fonctions bornées.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Définition

Définition - Limite de fonction complexe

On dit que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet le complexe ℓ pour limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers α) si la fonction à valeurs réelles $|f - \ell|$ tend vers 0 en α .

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Définition

Définition - Limite de fonction complexe

On dit que la fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ admet le complexe ℓ pour limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers α) si la fonction à valeurs réelles $|f - \ell|$ tend vers 0 en α .

Attention. Pas de limite infinie pour des fonctions à valeurs complexes

On ne définit pas de limite infinie pour une fonction à valeurs complexes...

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors f admet ℓ pour limite en α si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ admettent respectivement $\mathbf{Re}\ell$ et $\mathbf{Im}\ell$ pour limite en α .

On en déduit que si f admet une limite en α , celle-ci est unique.

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors f admet ℓ pour limite en α si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ admettent respectivement $\mathbf{Re}\ell$ et $\mathbf{Im}\ell$ pour limite en α .

On en déduit que si f admet une limite en α , celle-ci est unique.

Démonstration

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors f admet ℓ pour limite en α si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ admettent respectivement $\mathbf{Re}\ell$ et $\mathbf{Im}\ell$ pour limite en α .

On en déduit que si f admet une limite en α , celle-ci est unique.

Démonstration

Proposition - Limite donc bornée

Si f admet une limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de α .

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Propriété - Critère de convergence

Soit f une fonction à valeurs complexes, $\ell \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors f admet ℓ pour limite en α si et seulement si les fonctions $\mathbf{Re}f$ et $\mathbf{Im}f$ admettent respectivement $\mathbf{Re}\ell$ et $\mathbf{Im}\ell$ pour limite en α .

On en déduit que si f admet une limite en α , celle-ci est unique.

Démonstration

Proposition - Limite donc bornée

Si f admet une limite en $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de α .

Démonstration

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Proposition - Bilan

Soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |\ell| \quad \lim_{x \rightarrow a} \overline{f}(x) = \overline{\ell}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \ell + \mu m \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0$$

Soit $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$;

soit (u_n) une suite de X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Soient $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\phi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(I) \subset X$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) = a$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ \phi)(t) = \ell$.

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Proposition - Bilan

Soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $(\ell, m) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |\ell| \quad \lim_{x \rightarrow a} \overline{f}(x) = \overline{\ell}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \ell + \mu m \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m} \text{ pour } m \neq 0$$

Soit $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$;

soit (u_n) une suite de X telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Soient $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $\phi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ telle que $\phi(I) \subset X$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) = a$ alors $\lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ \phi)(t) = \ell$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par continuité

3.3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.4. Cas de l'image d'un segment par f continue

3.5. Théorème de la bijection (bis)

3.6. Continuité uniforme

4. Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1. Opérations classiques sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Continuité d'une fonction à valeurs complexes

Soit f définie sur I et $\alpha \in I$, f admet une limite en α équivaut à dire que **Re** f et **Im** f admettent des limites réelles en α , c'est-à-dire qu'elles sont continues en α .

Si c'est le cas on dit que f est continue en α .

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Cela équivaut à dire que **Re** $f, \mathbf{Im}f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sont continues sur I .

On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$.

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Proposition

Proposition - Stabilité par continuité

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est continue sur I alors $\overline{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $|f| \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sont continues sur I .

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ ($\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est un s.e.v. de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$).

Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$.

Si $\phi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ avec $\phi(J) \subset I$ alors $f \circ \phi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ Uniforme
continuité

$\Rightarrow$ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Exercice

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Exercice

Les propriétés suivantes restent-elles vraies en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{[a, b]} |f(x)|$.
2. Le théorème des valeurs intermédiaires (image continue d'un segment).

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Uniforme continuité
- ⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

- Définition : le pas est constant :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

- ▶ Définition : le pas est constant :
 $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$
- ▶ La continuité uniforme implique la continuité

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

- ▶ Définition : le pas est constant :
 $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$
- ▶ La continuité uniforme implique la continuité
- ▶ **Sur un segment**, la continuité implique la continuité uniforme.
 (Heine)

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Uniforme continuité
- ⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point

On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- Définitions : fonctions bornées, limite en un point

On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)

- Stabilité opératoire sur les limites

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- ▶ Définitions : fonctions bornées, limite en un point
On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)
- ▶ Stabilité opératoire sur les limites
- ▶ Définition de la continuité (on peut exploiter les parties réelles et imaginaires)

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

3. Fonction continue sur un ensemble (intervalle, segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

- ▶ Définitions : fonctions bornées, limite en un point
On s'intéresse à $|f(x) - \ell|$ (module, fonction de X dans $\mathbb{R}$)
- ▶ Stabilité opératoire sur les limites
- ▶ Définition de la continuité (on peut exploiter les parties réelles et imaginaires)
- ▶ De $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$? Oui pour le principe de Weierstrass, Non pour le TVI.

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité

Conclusion

⇒ Uniforme
continuité

⇒ Et pour les
fonctions à valeurs
complexes ?

Objectifs

⇒ Uniforme continuité

⇒ Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : Chap 21 - Dérivabilité
- ▶ Exercice : N° 419, 422

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

3. Fonction continue
sur un ensemble
(intervalle,
segment...)

3.1. Fonctions continues sur I

3.2. Prolongement par
continuité

3.3. TVI

3.4. $f(K)$

3.5. Théorème de la bijection
(bis)

3.6. Continuité uniforme

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

4.1. Opérations

4.2. Fonctions bornées

4.3. Limites

4.4. Opérations sur les limites

4.5. Continuité