

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

2.1. Définitions



Leçon 61 - Dérivabilité (approfondissements)

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels . .

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

Problème - Théorème de la mouche

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

Problème - Fonction continue, nulle part dérivable

Problème - Dérivation d'ordre n

Problème - Dérivation en un point

Problème - Théorème de la mouche

Problème - Fonctions complexes

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Fonction dérivable en un point

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si l'application (taux d'accroissement de f en a)

$$\begin{array}{ccc} \tau_a f : & I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a .

Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$ (ou $Df(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$) :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

⇒ Le nombre dérivé ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul



Définition

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Fonction dérivable en un point

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- ▶ Si $\tau_a f$ admet une limite finie à droite en a (a n'étant pas l'extrémité droite de I), on dit que f est dérivable à droite en a :

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- ▶ Si $\tau_a f$ admet une limite finie à gauche en a (a n'étant pas l'extrémité gauche de I), on dit que f est dérivable à gauche en a :

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a, x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

De la définition, on peut affirmer :

Proposition - Dérivée à gauche et à droite

Si a n'est pas une extrémité de I , f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

De la définition, on peut affirmer :

Proposition - Dérivée à gauche et à droite

Si a n'est pas une extrémité de I , f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a la définition équivalente, démontrée au chapitre 5

Proposition - Définition de Weierstrass

On rappelle que f est dérivable en a si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}, \epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et nul en a tels que $f(x) = f(a) + (x - a)(A + \epsilon(x))$.
Dans ce cas $f'(a) = A$.

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels . .

Définition - Fonction dérivable

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Passage à la fonction

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels . . .

Définition - Fonction dérivable

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Exemple $x \mapsto |x|$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

Définition - Fonction dérivable

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Exemple $x \mapsto |x|$

Théorème - Dérivabilité $\Rightarrow$ continuité

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en $a \in I$, alors f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en a .

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Remarque Réciproque fausse

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Remarque Réciproque fausse

Remarque Approximation affine de f en α

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Propositions (déjà vues)

On démontre des résultats énoncés au chapitre 5.

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels . .

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Propositions (déjà vues)

On démontre des résultats énoncés au chapitre 5.

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a , λ et μ deux réels.

Alors $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$

$$(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a , λ et μ deux réels.

Alors $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$

$$(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Démonstration

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Propositions (déjà vues)

Proposition - Dérivation d'un produit

Soient f et g deux fonctions dérivables en a , λ et μ deux réels.

Alors $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$

$$(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

⇒ Le nombre
dérivée! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Démonstration

Théorème - Démonstration de composition de fonctions

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tq que $\phi(I) \subset J$, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$,
 $a \in I$.

Si ϕ est dérivable en a et f dérivable en $\phi(a)$

alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et $(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a)f'(\phi(a))$.

Si ϕ est dérivable sur I , f dérivable sur J , alors $f \circ \phi$ est
dérivable sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \times f' \circ \phi$.

Démonstration

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f dérivable en a . Alors il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$, voisinage de a dans I , tel que f ne s'annule pas sur J et $\frac{1}{f}$ (qui est donc définie sur J) est dérivable en a ,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels ...

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f dérivable en a . Alors il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$, voisinage de a dans I , tel que f ne s'annule pas sur J et $\frac{1}{f}$ (qui est donc définie sur J) est dérivable en a ,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

Exercice

Démonstration avec le critère de Weierstrass.

1. Ecrire le développement de $\frac{1}{f(x)}$ en exploitant la dérivée de f en a .
2. Montrer que si $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors il existe ψ tel que
$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \text{ et } \frac{1}{1 + (x - a)(A + \varphi(x))} = 1 - (x - a)(A + \psi(x))$$
3. En factorisant par $\frac{1}{f(a)}$, montrer que f est dérivable en a et retrouver la valeur de $f'(a)$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I , dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

$\Rightarrow$ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I , dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire - Fonction réciproque

Soit f dérivable, strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

$\Rightarrow$ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I , dérivable en $a \in I$. On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire - Fonction réciproque

Soit f dérivable, strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I . Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Le nombre
dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Conclusion

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels. . .

Objectifs

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Conclusion

Objectifs

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- ▶ Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Conclusion

Objectifs

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- ▶ Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.
- ▶ Il existe des algorithmes de calculs d'opération de fonctions

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

Objectifs

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

- ▶ Définition de la dérivée en un point (par une limite) puis sur un intervalle.
- ▶ Il existe des algorithmes de calculs d'opération de fonctions
- ▶ Les fonctions usuelles sont dérivables avec des formules à connaître (tableau !).

Non vu dans ce chapitre...

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels...

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

⇒ Le nombre
dérivée ! Rappels...

Objectifs

⇒ Le nombre dérivée ! Rappels de manipulations du début d'année (avec formalisation)

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 13 : Dérivabilité
3. Etude globale des fonctions dérivables
- ▶ Exercice n°426 & 427

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul