

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Dérivée

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements finis

Dérivation successive en un point

Définition - Dérivées successives en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit par récurrence

- $f^{(0)} = f$
- pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$, J voisinage dans I de a , tel que f soit $n - 1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)} : J \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable en a .

On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$ ou aussi $D^n f(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Égalité des accroissements finis

Dérivation successive en un point

Définition - Dérivées successives en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On définit par récurrence

- $f^{(0)} = f$
- pour $n \geq 1$, on dit que f est n fois dérivable en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$, J voisinage dans I de a , tel que f soit $n - 1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)} : J \rightarrow \mathbb{R}$ soit dérivable en a .

On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$ ou aussi $D^n f(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a)$.

Attention. Voisinage de a

Notons que pour définir $f'(a)$, on a besoin d'un intervalle contenant a (voisinage) pour f .

De même pour définir $f^{(n)}(a)$, il faut un voisinage de a pour définir $f^{(n-1)}$ donc f dérivable $n - 1$ fois sur plus que a .

On ne définit donc la n -dérivabilité en un point, mais sur un voisinage.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Égalité des accroissements finis

Dérivation successive sur un intervalle

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I .

L'application

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n -ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Dérivation successive sur un intervalle

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I .

L'application

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n -ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Exercice

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Dérivation successive sur un intervalle

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I .

L'application

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n -ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Exercice

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}$.

Proposition - Cas d'une combinaison linéaire

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable en a et on a la formule : $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a) + \mu g^{(n)}(a)$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Dérivation successive sur un intervalle

Définition - Dérivées successives d'une fonction

On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I .

L'application

$$\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{cases}$$

est alors appelée dérivée n -ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Exercice

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}$.

Proposition - Cas d'une combinaison linéaire

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable en a et on a la formule : $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a) + \mu g^{(n)}(a)$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors $f \times g$ est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors $f \times g$ est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

Exercice

Soit $h : x \mapsto (x^2 + x + 1) \sin 2x$. Calculer $h^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème de Leibniz

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors $f \times g$ est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k)}(a).$$

Exercice

Soit $h : x \mapsto (x^2 + x + 1) \sin 2x$. Calculer $h^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J, a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.

Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a .

$\Rightarrow$ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J, a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.

Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a .

Corollaire - Inverse n fois dérivable

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$ tels que $f(a) \neq 0$ et f , n fois dérivable en a ($n \geq 1$).

Alors $\frac{1}{f}$ (définie sur un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas) est n fois dérivable en a .

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Corollaire - Composition n fois dérivable

Soient $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J, a \in I, n \in \mathbb{N}^*$.
Si ϕ est n fois dérivable en a et f n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a .

Corollaire - Inverse n fois dérivable

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$ tels que $f(a) \neq 0$ et f , n fois dérivable en a ($n \geq 1$).
Alors $\frac{1}{f}$ (définie sur un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas) est n fois dérivable en a .

Démonstrations

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Dérivation successive de la fonction réciproque

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Proposition - Réciproque n fois dérivable

Soit f continue, strictement monotone sur I . Soit $n \geq 1$. Si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable sur $f(I)$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Dérivation successive de la fonction réciproque

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Proposition - Réciproque n fois dérivable

Soit f continue, strictement monotone sur I . Soit $n \geq 1$. Si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable sur $f(I)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Remarque La force du théorème !

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Remarque La force du théorème !

Définition - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ (ou que f est n fois continûment dérivable) si

- (i) f est n fois dérivable sur I
- (ii) $f^{(n)}$ est continue sur I .

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n . On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Remarque La force du théorème !

Définition - Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ (ou que f est n fois continûment dérivable) si

- (i) f est n fois dérivable sur I
- (ii) $f^{(n)}$ est continue sur I .

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n . On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque Inclusion d'ensembles

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Proposition - Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Combinaison linéaire, produit, inverse, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, fonction réciproque de f de classe $\mathcal{C}^n$ telle que f' ne s'annule pas sont de classe $\mathcal{C}^n$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Proposition - Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arctan, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $\arcsin, \arccos$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Égalité des accroissements finis

Proposition - Fonctions usuelles

Les fonctions polynomiales, les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arctan, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Les fonctions $\arcsin, \arccos$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

Exercice

Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1 + \sin^2 x)y'' + y' + e^{-5x}y = \operatorname{ch}x$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Proposition - Annulation de la dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $c \in I$, c n'étant pas une extrémité de I .

On suppose que f est dérivable en c et admet un maximum local en c .

Alors $f'(c) = 0$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Proposition - Annulation de la dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $c \in I$, c n'étant pas une extrémité de I .

On suppose que f est dérivable en c et admet un maximum local en c .

Alors $f'(c) = 0$.

Remarque Généralisation et vocabulaire

- ▶ Un point c tel que $f'(c) = 0$ s'appelle un point critique
- ▶ on a le même résultat pour un minimum local

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Attention !

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Attention. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n'est pas une condition suffisante.

Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ en 0.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Attention !

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Attention. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n'est pas une condition suffisante.

Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ en 0.

Attention. La condition d'intérieur

La proposition est fausse pour c en une extrémité de I . Le contre-exemple classique suivant le montre : $x \mapsto x + 1$ sur $[-1, 1]$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Attention !

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Attention. Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c) = 0$ n'est pas une condition suffisante.

Le contre-exemple classique suivant le montre : $I = \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ en 0.

Attention. La condition d'intérieur

La proposition est fausse pour c en une extrémité de I . Le contre-exemple classique suivant le montre : $x \mapsto x + 1$ sur $[-1, 1]$

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Théorème de Rolle

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème -Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Théorème de Rolle

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème -Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Théorème de Rolle généralisé

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b = \infty$,
mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall x > B$,
 $|f(x) - f(a)| < |f(d) - f(a)|$:

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Théorème de Rolle généralisé

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b = \infty$,
mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall x > B$,
 $|f(x) - f(a)| < |f(d) - f(a)|$:

Proposition - Généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$
telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Théorème de Rolle généralisé

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

La même démonstration s'adapte tout à fait, au cas où $b = \infty$,
mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall x > B$,
 $|f(x) - f(a)| < |f(d) - f(a)|$:

Proposition - Généralisation du théorème de Rolle

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$
telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice

Faire la démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Savoir-faire. Les racines imbriquées

Bien souvent on applique le théorème de Rolle avec f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b) = 0$, on obtient alors la version suivante : *Entre deux zéros de f il y a un zéro de f' .*

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Savoir-faire. Les racines imbriquées

Bien souvent on applique le théorème de Rolle avec f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $f(a) = f(b) = 0$, on obtient alors la version suivante : *Entre deux zéros de f il y a un zéro de f' .*

Exercice

Montrer la formule de Taylor-Lagrange :

Si $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ et $n + 1$ fois dérivable, il existe $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Savoir-faire. Quelle fonction φ choisir pour appliquer le théorème de Rolle ?

De manière générale, on prend $\varphi = f - P$ où P est un polynôme bien choisi.

Mais il y a deux types de questions :

- ▶ Ou bien c est associé à une série de dérivées de f en un même point.

C'est le cas ici $(f^{(k)}(a))$ avec la formule de Taylor.

- ▶ Ou bien c est associé à une série de valeurs de f (interpolation).

On considère alors ici
$$P(t) = \sum_{k=0}^d f(x_k) \prod_{i \neq k} \frac{t - x_i}{x_k - x_i}.$$

On annule et on dérive (plusieurs fois - si nécessaire) avec le théorème de Rolle

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Dérivée

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Remarque Graphiquement

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Remarque Graphiquement
Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - CNS de Variations de f

I désigne un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (I privé de ses éventuelles bornes). Alors

- ▶ f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$,
- ▶ f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$,
- ▶ f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Théorème - CNS de Variations de f

I désigne un intervalle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (I privé de ses éventuelles bornes). Alors

- ▶ f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0$,
- ▶ f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \geq 0$,
- ▶ f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) \leq 0$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Application aux variations strictes d'une fonction

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors

$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Application aux variations strictes d'une fonction

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors

$\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .

Attention - La réciproque est fausse

$f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $] - 1, 1[$.

Et pourtant $f'(0) = 0$, avec $0 \in] - 1, 1[$

$\Rightarrow$ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Application aux variations strictes d'une fonction

Leçon 62 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors
 $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .

Attention - La réciproque est fausse

$f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $] - 1, 1[$.
Et pourtant $f'(0) = 0$, avec $0 \in] - 1, 1[$

Exercice

En appliquant le théorème énoncé dans la marge, montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I .

$\Rightarrow$ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

$\Rightarrow$ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Etude de la fonction réciproque en particulier.

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Etude de la fonction réciproque en particulier.

- Théorème de Leibniz : $(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- ▶ Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Etude de la fonction réciproque en particulier.

- ▶ Théorème de Leibniz : $(f \times g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$

- ▶ Dérivée k de $f \circ \varphi$, et applications aux fonctions réciproques.

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de Rolle

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

► Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

- ▶ Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ▶ Egalité des accroissements finis : $\exists c \in]a, b[$ tel que $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

- ▶ Théorème de Rolle : si $f(a) = f(b)$, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ▶ Egalité des accroissements finis : $\exists c \in]a, b[$ tel que $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$.
- ▶ Inégalité des accroissements finis : $f(b) - f(a) \leq \sup_{[a,b]} f' \times (b - a)$.

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis

⇒ Fonctions de
classe $\mathcal{C}^k$

⇒ Théorème de
Rolle

Objectifs

⇒ Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 13 : Dérivabilité
4. Fonctions à valeurs complexes
- ▶ Exercice n° 436 & 446

1. Problèmes

2. Dérivée

2.1. Définitions

2.2. Règles de calcul

2.3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3. Etude globale des
fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

3.2. Egalité des accroissements
finis