

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

**3.3. Inégalité des
accroissements finis**

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Inégalités des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$ alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Corollaire - f bornée et fonction lipschitzienne

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I . S'il existe $K \geq 0$ tel que
 $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$ alors f est **K -lipschitzienne sur I**
c'est-à-dire que

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, |f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|.$$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

**3.3. Inégalité des
accroissements finis**

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f , alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.

Le contrôle réciproque ne marche pas.

On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f , alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.

Le contrôle réciproque ne marche pas.

On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice

Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f , alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.

Le contrôle réciproque ne marche pas.

On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice

Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

Démonstration

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f , alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.

Le contrôle réciproque ne marche pas.

On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice

Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

Démonstration

Remarque Interprétation autoroutière

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Remarque Réciproque du corollaire

Savoir-faire. Contrôler f' pour contrôler f

Si l'on cherche à maîtriser f , alors il suffit de maîtriser f' et d'intégrer la relation.

Le contrôle réciproque ne marche pas.

On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles.

Exercice

Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

Démonstration

Remarque Interprétation autoroutière

Exercice

Une fonction à dérivée bornée est uniformément continue

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Savoir-faire. Application à l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Cette méthode s'applique à toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n)$ telle que

- ▶ I est un intervalle fermé stable par f
- ▶ f est dérivable et il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$
- ▶ il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$

Dans ce cas, pour tout $n > 0$,

$$|u_n - \ell| \leq k |u_{n-1} - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

(par récurrence géométrique). Et donc, par le théorème d'encadrement : $(u_n) \rightarrow \ell$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Exercice

On considère la suite définie par $u_0 \geq 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Donner une majoration de $|u_{n+1} - 2|$
en fonction de $|u_n - 2|$ puis une majoration de $|u_n - 2|$ en
fonction de $|u_0 - 2|$ et n . En déduire que (u_n) est convergente.

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Suite $u_{n+1} = f(u_n)$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Exercice

On considère la suite définie par $u_0 \geq 0$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Donner une majoration de $|u_{n+1} - 2|$
en fonction de $|u_n - 2|$ puis une majoration de $|u_n - 2|$ en
fonction de $|u_0 - 2|$ et n . En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n$.

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a .

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a .

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Corollaire - Limite de la dérivée (au coeur de l'intervalle)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , dérivable sur les deux intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a , alors f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Limite de la dérivée

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a .

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Corollaire - Limite de la dérivée (au coeur de l'intervalle)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , dérivable sur les deux intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a , alors f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Démonstration

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Proposition - Limite de la dérivée infinie

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$ (resp $-\infty$).

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire que f n'est pas dérivable en a mais que $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a .

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Proposition - Limite de la dérivée infinie

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = +\infty$ (resp $-\infty$).

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire que f n'est pas dérivable en a mais que $\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a .

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

Exemple Applications

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Théorème - Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ par prolongement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque Force du théorème

Exemple Applications

On généralise par récurrence aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème - Théorème de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement

Soit $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i en a . Alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Exemple - Fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Exemple - Fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice

Soit

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
2. f' a-t-elle une limite en 0 ?
3. f est-elle dérivable sur $[0, 1]$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$?
4. Que peut-on en conclure pour les théorèmes précédents ?

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Exploiter le théorème de la limite de la dérivée

Ici, il est surtout important de montrer au correcteur que l'on écrit pas n'importe quoi.

- ▶ Par exemple, ce n'est pas la dérivée qui est prolongée.
- ▶ Savoir si une fonction est dérivable en un point, ne consiste pas a priori, à savoir si la dérivée admet une limite en ce point.

Cette dernière observation ($\lim_{x_0} f'$) s'étudie comme conséquence d'un super théorème !

Pour être assuré que le correcteur a bien compris qu'on exploite ce théorème, on rappelle avec insistance les hypothèses à vérifier pour appliquer le théorème (continuité de $f \dots$).

Si on doit le démontrer pour les dérivées de tous les ordres, on fait une récurrence, avec un contrôle pour s'assurer le passage à la limite.

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Exercice

Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$. Montrer que f se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension de la règle de l'Hospital

Leçon 63 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim_a \frac{f'}{g'}$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension de la règle de l'Hospital

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim_a \frac{f'}{g'}$.

Démonstration

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension de la règle de l'Hospital

Leçon 63 -
Dérivabilité
(approfondissements)

Analyse Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital

Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim_a \frac{f'}{g'}$.

Démonstration

Un petit d'exercice d'application qui donne un savoir-faire et reprend un résultat classique.

Exercice

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}$

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Définition (équivalence)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Taux de variations ou parties réelle et imaginaire

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, $a \in I$. On définit la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- τ_a possède une limite en a (limite dans $\mathbb{C}$).
- **Re** f et **Im** f (fonctions à valeurs réelles) sont dérivables en a .

On dit alors que f est dérivable en a . On note

$$f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a) \text{ cette limite.}$$

$$\text{On a } f'(a) = (\mathbf{Re}f)'(a) + i(\mathbf{Im}f)'(a).$$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Définition (équivalence)

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Définition - Taux de variations ou parties réelle et imaginaire

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, $a \in I$. On définit la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- τ_a possède une limite en a (limite dans $\mathbb{C}$).
- **Re** f et **Im** f (fonctions à valeurs réelles) sont dérivables en a .

On dit alors que f est dérivable en a . On note

$$f'(a) = Df(a) = \frac{df}{dx}(a) \text{ cette limite.}$$

$$\text{On a } f'(a) = (\mathbf{Re}f)'(a) + i(\mathbf{Im}f)'(a).$$

Remarque Démonstration ?

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Dérivable donc continue

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est dérivable en α , alors elle est continue en α .

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Dérivable donc continue

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est dérivable en α , alors elle est continue en α .

Démonstration

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Dérivable donc continue

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (en un point)

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est dérivable en α , alors elle est continue en α .

Démonstration

Proposition - Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité (sur un intervalle)

f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .
Dans ce cas elle est continue sur I .

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Définition - Dérivations successives

On définit les dérivées successives de la même manière que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n -ième est continue sur I .

On dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n (soit si elle est dérivable à n'importe quel ordre).

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I .

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements finis

3.3. Inégalité des accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Proposition - Stabilité

Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivables en a et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ alors

- $\lambda f + \mu g, f g, \frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas en a) sont dérivables en a , les formules donnant les dérivées étant les mêmes que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Si $\phi \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ ($\phi(J) \subset I$) est une fonction dérivable en $\phi(a)$ alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et $(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a)f'(\phi(a))$
- $\overline{f}$ est dérivable en a et $(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}$.
- L'exponentielle complexe de f
($e^f : x \mapsto e^{f(x)} = e^{\operatorname{Re} f(x)}(\cos(\operatorname{Im} f(x)) + i \sin(\operatorname{Im} f(x)))$) est dérivable en a et $(e^f)'(a) = f'(a)e^{f(a)}$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Plus généralement encore :

Proposition - Stabilité

On a donc que si $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ sont dérivables sur I , ϕ dérivable sur J , alors $\lambda f + \mu g$, $f g$, $\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur I), $f \circ \phi$, $\bar{f}$, e^f sont dérivables sur I avec les formules usuelles de dérivation.

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \text{ (formule de Leibniz)}$$

4.2. Opérations

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I
2. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Extension ?

Exercice

Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I
2. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.
3. Inégalité des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) telle que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$. Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

$\Rightarrow$ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

$\Rightarrow$ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Objectifs

- ⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle
- ⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

- Egalité des accroissements finis : f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

- Égalité des accroissements finis : f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.

- En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

- ▶ Égalité des accroissements finis : f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.
- ▶ En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
- ▶ Si $f'(x)$ admet une limite en a , alors la régularité se prolonge pour f en a .
Prolongement du caractère dérivable de f .

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

- ▶ Égalité des accroissements finis : f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$.
- ▶ En particulier : application aux suites $u_{n+1} = f(u_n)$.
- ▶ Si $f'(x)$ admet une limite en a , alors la régularité se prolonge pour f en a .
Prolongement du caractère dérivable de f .
- ▶ Règle de L'Hospital

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de L'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

- ▶ f dérivable en α , si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

- ▶ f dérivable en a , si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- ▶ Généralisation pour la dérivée d'ordre n .

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

- ▶ f dérivable en a , si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- ▶ Généralisation pour la dérivée d'ordre n .
- ▶ En terme de calculs : tout va toujours comme pour les fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}$.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle

⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

- ▶ f dérivable en a , si le taux de variations admet une limite ou si $\mathbf{Re}(f)$ et $\mathbf{Im}(f)$ sont dérivables.
- ▶ Généralisation pour la dérivée d'ordre n .
- ▶ En terme de calculs : tout va toujours comme pour les fonctions de $I \rightarrow \mathbb{R}$.
- ▶ En terme de proposition : on garde l'inégalité des accroissements finis, mais on perd le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Egalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Utilisations concrètes de la fonction dérivée sur un intervalle
- ⇒ Extension (ou non) des résultats aux fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 22 : Convexité
- ▶ Exercice n° 439 & 440
- ▶ TD de jeudi :
8h-10h : 428, 432, 433, 444
10h-12h : 429, 434, 437, 445

⇒ Utilisations
concrètes de la
fonction dérivée sur
un intervalle

⇒ Extension (ou non)
des résultats aux
fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Dérivée

3. Théorème de Rolle

3.1. Inégalité des
accroissements finis

3.2. Égalité des accroissements
finis

3.3. Inégalité des
accroissements finis

3.4. Prolongement dérivable ou
limite de la dérivée

3.5. Prolongement de la règle
de l'Hospital

4. Généralisation aux
fonctions à valeurs
complexes

4.1. Définitions

4.2. Opérations