

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Problème Une dérivée seconde positive ?

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Problème Une dérivée seconde positive ?

Problème Convexité $\Rightarrow$ Dérivabilité ?

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Analyse - Equation paramétrique d'un segment.

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Analyse - Equation paramétrique d'un segment.

Paramétrisation du segment $[a, b]$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$t \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } t = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

A savoir, ce nombre λ vérifie : $\lambda = \frac{t - b}{a - b}$.

1. Problèmes

2. Fonctions
convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un
segment

2.2. Définition d'une fonction
convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des
fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec
la dérivation)

Segment

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Analyse - Equation paramétrique d'un segment.

Paramétrisation du segment $[a, b]$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$t \in [a, b] \Leftrightarrow \exists \lambda \in [0, 1] \text{ tel que } t = \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

A savoir, ce nombre λ vérifie : $\lambda = \frac{t - b}{a - b}$.

On note également : $\lambda = 0 \Leftrightarrow t = a$ et $\lambda = 1 \Leftrightarrow t = b$.

1. Problèmes

2. Fonctions
convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Définition

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.

On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Définition

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.

On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Définition

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Définition - Fonction convexe et concave

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lorsque l'inégalité est stricte ($\lambda \neq 0$ et 1), on dit que f est strictement convexe.

On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple $x \mapsto x^2$.

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Remarque Critère de convexité.

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

**2.2. Définition d'une fonction
convexe (et concave)**

2.3. Stabilité de l'ensemble des
fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

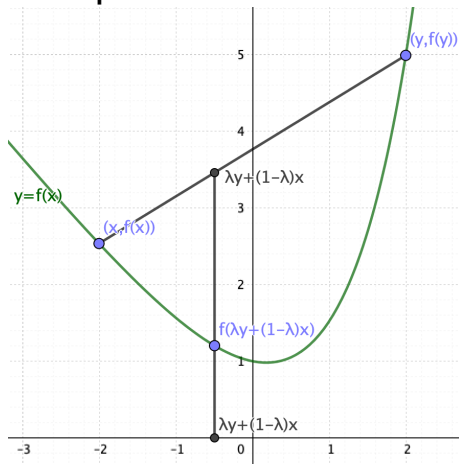
4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec
la dérivation)

Représentation

Remarque Critère de convexité.



⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

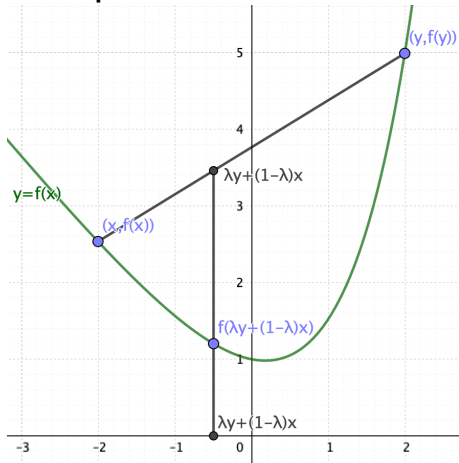
4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Représentation

Remarque Critère de convexité.



⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Exercice

Que dire de f si f est convexe et concave sur I

Inégalité paramétrique explicite

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Savoir-faire. Inégalité de convexité de manière explicite

On cherche à énoncer l'inégalité de convexité pour $z \in [x, y]$.

On a alors $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ avec $\lambda = \frac{z - y}{x - y}$ et $1 - \lambda = \frac{z - x}{y - x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \frac{z - y}{x - y} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y) = \frac{(z - y)f(x) - (x - z)f(y)}{x - y} \\ &= \frac{z(f(x) - f(y)) - (xf(y) - yf(x))}{x - y} \end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Proposition - Stabilité

Si f et g sont convexes sur I , alors $f + g$ est convexe sur I .

Si f est convexe sur I et $k \geq 0$. Alors kf est convexe sur I .

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Proposition - Stabilité

Si f et g sont convexes sur I , alors $f + g$ est convexe sur I .

Si f est convexe sur I et $k \geq 0$. Alors kf est convexe sur I .

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k)$$

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Proposition - Inégalité de Jensen

Si f est convexe sur I , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k)$$

Démonstration

Savoir-faire. Normaliser les coefficients pour la convexité

On notera la technique classique qui consiste étant donné une famille de coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$ positifs tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i$ possède une valeur S de considérer $\mu_i = \frac{\lambda_i}{S}$.

$\Rightarrow$ Convexité

$\Rightarrow$ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f .

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f .

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I . Alors pour tout $x, y, z \in I$ et

$x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f .

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I . Alors pour tout $x, y, z \in I$ et

$x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f .

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I . Alors pour tout $x, y, z \in I$ et

$x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration

Proposition - Croissance des pentes

Soit f définie sur I .

f est convexe sur I si et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in I, \varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Pentes

Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f .

Lemme - Inégalité des trois pentes

Soit f une fonction convexe sur I . Alors pour tout $x, y, z \in I$ et

$x < y < z$,

$$\text{on a } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration

Proposition - Croissance des pentes

Soit f définie sur I .

f est convexe sur I si et seulement si,

$$\text{pour tout } a \in I, \varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ est croissante sur } I \setminus \{a\}$$

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I .

On suppose de plus que f est dérivable sur I .

Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I .

On suppose de plus que f est dérivable sur I .

Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Démonstration

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Tangente

On suppose localement (dans ce cours) que f est dérivable

Propriété - Inégalité des tangentes

Soit f convexe sur I .

On suppose de plus que f est dérivable sur I .

Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Démonstration

Selon que l'on cherche une majoration de $f(x)$ ou une minoration :

Savoir-faire. Utilisation de la convexité (inégalités)

Trois façons d'exploiter la convexité d'une fonction :

- ▶ La comparaison à la corde qui donne un majorant à $f(x)$
- ▶ La comparaison à la tangente qui donne un minorant à $f(x)$
- ▶ La comparaison des pentes, croissantes (avec le lemme des trois pentes ou directement).

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions
convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Remarque Rappel - Intérieur

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Convexité implique continuité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Remarque Rappel - Intérieur

Proposition - Convexité implique continuité

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction convexe sur I , alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ (l'intérieur de I).

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Convexité implique continuité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Remarque Rappel - Intérieur

Proposition - Convexité implique continuité

Soit I un intervalle.

Si f est une fonction convexe sur I , alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ (l'intérieur de I).

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Un critère de convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Un critère de convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Proposition - Critère de convexité avec sa dérivée

Si f est dérivable sur I , alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I .

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Un critère de convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Proposition - Critère de convexité avec sa dérivée

Si f est dérivable sur I , alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I .

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Savoir-faire. Démontrer qu'une fonction est convexe

Dans de nombreux cas, on montre que f est convexe en montrant que f est dérivable et f' croissante.

Et la plupart du temps, on a f dérivable deux fois. Dans ce cas, f est convexe si (et seulement si) $f'' \geq 0$.

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Savoir-faire. Démontrer qu'une fonction est convexe

Dans de nombreux cas, on montre que f est convexe en montrant que f est dérivable et f' croissante.

Et la plupart du temps, on a f dérivable deux fois. Dans ce cas, f est convexe si (et seulement si) $f'' \geq 0$.

Exercice

1. Montrer que $\exp$ est convexe.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Dérivabilité par la convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \mapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x .

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Dérivabilité par la convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \mapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x .

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Dérivabilité par la convexité

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite

Soit f est convexe sur l'intervalle I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I et pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \mapsto |x|$ sinon f serait dérivable en x .

Démonstration

On retrouve comme corollaire la continuité de f en x .

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Écriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

- ▶ f convexe sur $I : \forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1],$
 $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

- ▶ f convexe sur $I : \forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1],$
 $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$
- ▶ Inégalité des trois pentes.

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

- ▶ f convexe sur $I : \forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1],$
 $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$
- ▶ Inégalité des trois pentes.
- ▶ Critère de convexité si f dérivable (une ou deux fois).

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

- ▶ f convexe sur $I : \forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1],$
 $f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$
- ▶ Inégalité des trois pentes.
- ▶ Critère de convexité si f dérivable (une ou deux fois).
- ▶ Et réciproquement. . .

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

► Inégalités de Jensen

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

- ▶ Inégalités de Jensen
- ▶ Majoration : f au-dessous des cordes

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

- ▶ Inégalités de Jensen
- ▶ Majoration : f au-dessous des cordes
- ▶ Minoration : f au-dessus des tangentes

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)

Conclusion

Objectifs

⇒ Convexité

⇒ En déduire des inégalités

- ▶ Inégalités de Jensen
- ▶ Majoration : f au-dessous des cordes
- ▶ Minoration : f au-dessus des tangentes

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités
- ▶ Exercice pour jeudi : 450 & 453
- ▶ TD de jeudi :
8h-10h : ...+ 449, 458, 461
10h-12h : ...+ 454, 459

⇒ Convexité

⇒ Inégalités

1. Problèmes

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

3. Inégalités

3.1. Généralisation

3.2. Comparaison des pentes

3.3. Tangente

4. Régularité

4.1. Continuité

4.2. Critère de convexité (avec la dérivation)