

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

2.1. Rappel : le cas des suites

2.3. Relations d'équivalence.

Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison



Leçon 65 - Développements limités

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

Voisinage de $-\pi$; $f(x) \approx \frac{1 - e^{-x}}{x} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}x)$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Zooms sur une courbe

Problème. Une courbe, des zooms

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Geogebra

Voisinage de 0 ; $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$

Voisinage de $-\pi$; $f(x) \approx \frac{1 - e^{-x}}{x} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}x)$

Heuristique. Développement limité

1. On remplace une fonction par un développement mieux maîtrisé (polynôme...)
2. Cela dépend du voisinage du point considéré.
3. Plus on souhaite qu'il soit bon, plus il faudra qu'il y ait de coefficients.

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynomiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.

Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en $n \rightarrow +\infty$).

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynomiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.

Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en $n \rightarrow +\infty$).

Attention. Selon le point

Il n'est jamais trop tard pour insister : la fonction (polynomiale - par exemple) plus simple qui décrit f **dépend du point** auprès duquel on est amené à faire l'étude.

Le résultat au voisinage de 0, n'a rien à voir avec celui au voisinage de $-\pi$! (par exemple).

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Définition - Définition généralisée

Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- ▶ (u_n) est négligeable devant (v_n) , notée $u_n = o(v_n)$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$
- ▶ (u_n) est équivalente à (v_n) , notée $u_n \sim v_n$ si
$$u_n - v_n = o(v_n)$$
- ▶ (u_n) est dominée par (v_n) , notée $u_n = O(v_n)$ si
$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq C |v_n|.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Définition - Définition généralisée

Soient (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- ▶ (u_n) est négligeable devant (v_n) , notée $u_n = o(v_n)$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq \epsilon |v_n|.$$
- ▶ (u_n) est équivalente à (v_n) , notée $u_n \sim v_n$ si
$$u_n - v_n = o(v_n)$$
- ▶ (u_n) est dominée par (v_n) , notée $u_n = O(v_n)$ si
$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n| \leq C |v_n|.$$

Remarque Cas d'étude

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination. . . d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- ▶ si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction f ...

Très souvent, on se *ramène* à cette situation.

- ▶ si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination. . . d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- ▶ si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction f ...

Très souvent, on se *ramène* à cette situation.

- ▶ si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

Remarque Rappels

- ▶ $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
- ▶ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_n \ln n$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Savoir-faire

Savoir-faire. Etude de négligeabilité/équivalence/domination. . . d'une suite

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- ▶ si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction f ...

Très souvent, on se *ramène* à cette situation.

- ▶ si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$ où (v_n) est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité/d'équivalence/de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.)

Remarque Rappels

- ▶ $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
- ▶ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_n \ln n$

Nous ne reviendrons plus sur le cas des suites

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.

Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Définition - Définition généralisée

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I . On dit que

- ▶ f est négligeable devant g au voisinage de a , notée $f \underset{a}{=} o(g)$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

- ▶ f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
- ▶ f est dominée par g au voisinage de a notée $f \underset{a}{=} O(g)$ si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq C |g(x)|.$$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Définition - Définition généralisée

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I . On dit que

- ▶ f est négligeable devant g au voisinage de a , notée $f \underset{a}{=} o(g)$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|.$$

- ▶ f est équivalente à g au voisinage de a si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.
- ▶ f est dominée par g au voisinage de a notée $f \underset{a}{=} O(g)$ si

$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leq C |g(x)|.$$

Remarque Ensemble $g^{-1}(\{0\})$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Attention. g n'est pas jamais presque toujours nulle (mais g n'est pas nécessairement presque toujours non nulle. . .)

On ne s'intéressera jamais à une comparaison à une fonction g nulle sur un voisinage de a (i.e. presque toujours nulle). Elle n'est comparable (les trois cas) qu'avec des fonctions nulles sur un (autre) voisinage de a .

Ainsi, on supposera nécessairement que g est infiniment souvent non nul sur un voisinage de a . Autrement écrit : il existe des nombres x infiniment proche de a tel que $g(x) \neq 0$. Ou enfin : a est adhérent à $I \cap g^{-1}(\{0\})$. Formellement :

$\exists V \in \mathcal{V}_a \subset I$ tel que $\{x \in V, g(x) \neq 0\}$ est infini

$\exists (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow a$ et $g(x_n) \neq 0$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Caractérisation avec une fonction auxiliaire

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I .

Alors on a $f =_a o(g)$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\underset{a}{h} \rightarrow 0$ et $f = hg$ au voisinage de a .

Alors on a $f \sim_a g$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\underset{a}{h} \rightarrow 1$ et $f = hg$ au voisinage de a .

Alors on a $f =_a O(g)$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec h bornée au voisinage de a et $f = hg$ au voisinage de a .

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Caractérisation avec une fonction auxiliaire

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I .

Alors on a $f =_a o(g)$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h \xrightarrow{a} 0$ et $f = hg$ au voisinage de a .

Alors on a $f \sim_a g$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $h \xrightarrow{a} 1$ et $f = hg$ au voisinage de a .

Alors on a $f =_a O(g)$ si et seulement si

$\exists h : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec h bornée au voisinage de a et $f = hg$ au voisinage de a .

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est équivalente à g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a .

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Attention. Insistons bien

Pour les fonctions, il s'agit bien d'une relation LOCALE (voisinage de a).

On peut avoir $f = o(g)$ pour $x \rightarrow a$ ET $g = o(f)$ pour $x \rightarrow b \dots$

Donc « $f = o(g)$ », sans précision supplémentaire NE SIGNIFIE RIEN

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})} 0 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est équivalente à g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})} 1 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a .

Démonstration

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})} 0 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est équivalente à g au voisinage de a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \notin g^{-1}(\{0\})} 1 \text{ et } \exists V \in \mathcal{V}_a \text{ tel que } g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}).$$

- f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\})$ sur un voisinage de a .

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Démonstration

Exercice Faire les autres démonstrations.

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Savoir-faire. Avec une fonction « relative »

Notons, pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Alors

- ▶ f est dominée par g au voisinage de a ssi h est bornée au voisinage de a .
- ▶ f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $h \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- ▶ f est équivalente à g au voisinage de a ssi $h \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Comparaison à $t \mapsto 1$

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Comparaison à une fonction constante

Soit f définie au voisinage de a . On a

$$f \underset{a}{=} O(1) \quad \Leftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

$$f \underset{a}{=} o(1) \quad \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Relations d'équivalence

Les propositions et théorèmes suivants se démontrent comme pour les suites (les résultats sont totalement équivalents).

Proposition - Equivalence : relation d'équivalence

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a . On a

- ▶ $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité).
- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).
- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).

La relation d'équivalence $\sim$ est donc une relation d'équivalence

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Relations d'équivalence

Les propositions et théorèmes suivants se démontrent comme pour les suites (les résultats sont totalement équivalents).

Proposition - Equivalence : relation d'équivalence

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a . On a

- ▶ $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité).
- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).
- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).

La relation d'équivalence $\sim$ est donc une relation d'équivalence

Démonstration

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a . On a

- ▶ $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- ▶ Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a . (transitivité)

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a . On a

- ▶ $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- ▶ Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a . (transitivité)

Démonstration

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Relation de préordre

Proposition - Relation de préordre

Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a . On a

- ▶ $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
- ▶ Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a . (transitivité)

Démonstration

Proposition - Liens entre les relations

- ▶ Si $f = o_a(g)$ alors $f = O_a(g)$
- ▶ On a : $f \sim_a g \Leftrightarrow f - g = o_a(g)$ (ou encore noté : $f = g + o(g)$).
- ▶ Si $f \sim_a g$ alors $f = O_a(g)$ et $g = O_a(f)$.
- ▶ Si $f \sim_a g$ alors $h = o_a(f) \Leftrightarrow h = o_a(g)$.

Démonstration

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Comparaisons usuelles

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha), \quad x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

On a également pour $0 < p < q$:

$$x^p = o_{+\infty}(x^q) \quad x^q = o_0(x^p) \quad \text{et} \quad (x-a)^q = o_a((x-a)^p).$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Comparaisons usuelles

Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha), \quad x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

On a également pour $0 < p < q$:

$$x^p = o_{+\infty}(x^q) \quad x^q = o_0(x^p) \quad \text{et} \quad (x-a)^q = o_a((x-a)^p).$$

En d'autres termes, aux bornes des intervalles de définition,
"l'exponentielle domine (= « l'emporte sur ») la puissance, la
puissance domine (= « l'emporte sur ») le logarithme" (croissances
comparées).

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Taux d'accroissement réinterprété

En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement - ou règle de Lhospital), on a

1. $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ou encore $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) ou encore $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Proposition - Taux d'accroissement réinterprété

En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement - ou règle de L'hospital), on a

1. $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ou encore $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) ou encore $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

- ▶ Fonction analytique dont l'expression est compliquée

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

- ▶ Fonction analytique dont l'expression est compliquée
- ▶ Quelle fonction simple peut la remplacer, **au voisinage d'un point** ?

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

- ▶ Fonction analytique dont l'expression est compliquée
- ▶ Quelle fonction simple peut la remplacer, **au voisinage d'un point** ?
- ▶ Une constante, une droite, une conique. . .

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- ▶ Au voisinage du point α : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Conclusion

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- ▶ Au voisinage du point α : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- ▶ Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- ▶ Au voisinage du point α : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- ▶ Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement
- ▶ Beaucoup de savoir-faire à maîtriser

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

- ▶ Au voisinage du point α : fonctions équivalentes, dominées, négligeables...
- ▶ Comme pour les suites. Avec en plus : la composition et les taux d'accroissement
- ▶ Beaucoup de savoir-faire à maîtriser
- ▶ En encore plus d'erreurs potentielles à éviter...

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et
premières propriétés

Objectifs

⇒ Problématique

⇒ Vocabulaire et premières propriétés

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités
3. Développements limités
- ▶ Exercice n° 468 & 471

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison