

$$\Rightarrow DL_n(a) \text{ (de } f) ?$$

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

2.1. Rappel : le cas des suites

2.3. Relations d'équivalence.

Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3.1. Définitions

3.2. Propriétés



Leçon 66 - Développements limités

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Proposition - Opérations avec o ou O

Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a . On a

- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- ▶ Si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ pour $x \in I \subset V_a$ et si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o(\frac{1}{f})$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.
- ▶ Si f et g sont positives avec $f \underset{a}{=} o(g)$, alors pour $\alpha > 0$, $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplaçant les « o » par des « O ».

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Proposition - Opérations avec o ou O

Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a . On a

- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- ▶ Si $f(x)$ et $g(x) \neq 0$ pour $x \in I \subset V_a$ et si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o(\frac{1}{f})$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.
- ▶ Si f et g sont positives avec $f \underset{a}{=} o(g)$, alors pour $\alpha > 0$, $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- ▶ Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplaçant les « o » par des « O ».

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

Théorème - Signe d'une fonction

Si f est équivalente à g en a , alors il existe $V \neq \{a\}$ voisinage de a , tel que f et g sont de même signe sur $V \setminus \{a\}$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Remarque Où avons-nous besoin de $f, g > 0$?

Théorème - Signe d'une fonction

Si f est équivalente à g en a , alors il existe $V \neq \{a\}$ voisinage de a , tel que f et g sont de même signe sur $V \setminus \{a\}$.

Exercice

Faire la démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Théorème - Equivalents et limite

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$.

- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell$;
- ▶ Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell, \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$, alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Proposition - Opérations

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage de a . On a

- ▶ Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ (et $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$ si h ne s'annule pas)
- ▶ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, f et g strictement positives (une suffit...) alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

Proposition - Substitution dans les relations de comparaison

Soient ϕ définie sur un voisinage de a telle que $\lim_{t \rightarrow a} \phi(t) = b$, f, g définies sur un voisinage de b . Alors :

$$f = O_b(g) \Rightarrow f \circ \phi = O_a(g \circ \phi)$$

$$f = o_b(g) \Rightarrow f \circ \phi = o_a(g \circ \phi)$$

$$f \sim_b g \Rightarrow f \circ \phi \sim_a g \circ \phi$$

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attentions !

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

- Somme : en 0 avec

$$f_1(t) = t, f_2(t) = t + t^2, g_1(t) = g_2(t) = -t \text{ on a } f_1 \underset{0}{\sim} f_2 \text{ mais } f_1 + g_1 \not\underset{0}{\sim} f_2 + g_2.$$

- Exponentielle : en $+\infty$ avec $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 + t$ on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \not\underset{+\infty}{\sim} e^g$.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attentions !

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Attention. Ce qui ne marche pas

D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

- Somme : en 0 avec

$$f_1(t) = t, f_2(t) = t + t^2, g_1(t) = g_2(t) = -t \text{ on a } f_1 \underset{0}{\sim} f_2 \text{ mais } f_1 + g_1 \not\underset{0}{\sim} f_2 + g_2.$$

- Exponentielle : en $+\infty$ avec $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 + t$ on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \not\underset{+\infty}{\sim} e^g$.

Exercice

Déterminer un équivalent de $\ln(\sin x)$ en 0.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE...

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE...

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

Attention. Confusion fréquente

Ne pas confondre $f \sim g$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $x + 1 - x = 1$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attentions !

Attention. Rien de plus TERRIBLE...

Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

Attention. Confusion fréquente

Ne pas confondre $f \sim g$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $x + 1 - x = 1$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Exercice

Faire les démonstrations

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Développement limité en $a \in \mathbb{R}$

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}$.

Définition - DL en un point réel

Soit I un intervalle contenant a ou d'extrémité a . Soit f une fonction définie sur I sauf éventuellement en a , à valeurs dans K .

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (DL_n en a ou $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K_n[X] \text{ tel que}$$

$$\forall x \in I, f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$$

$$= a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ où } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$\text{ou } f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

$P(x-a)$ s'appelle la partie régulière du DL_n de f en a .

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Définition - DL en ∞

Soit f une fonction définie sur $I = [a, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ s'il existe

un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

- 2.1. Rappel : le cas des suites
- 2.2. Définitions
- 2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre
- 2.4. Echelle de comparaison
- 2.5. Algèbre des relations de comparaison
- 2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Développement limité en $+\infty$

Définition - DL en ∞

Soit f une fonction définie sur $I = [a, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ s'il existe

un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Remarque Ecriture

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Propriété 1 : unicité

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Théorème - Unicité

- ▶ Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞), il est unique.
- ▶ Si f admet un DL_n en a , alors f admet un DL_p en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞) pour tout $p \leq n$ obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance p (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré $> p$ du polynôme).

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Propriété 1 : unicité

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Théorème - Unicité

- ▶ Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞), il est unique.
- ▶ Si f admet un DL_n en a , alors f admet un DL_p en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞) pour tout $p \leq n$ obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance p (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré $> p$ du polynôme).

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Corollaire - Lien avec la parité

- ▶ Si f admet en 0 un DL_n , $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $g : x \mapsto f(-x)$ admet en 0 le DL_n

$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$

- ▶ Si f admet un DL_n en 0 et f paire (resp. f impaire) alors le DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Corollaire - Lien avec la parité

- ▶ Si f admet en 0 un DL_n , $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $g : x \mapsto f(-x)$ admet en 0 le DL_n

$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$

- ▶ Si f admet un DL_n en 0 et f paire (resp. f impaire) alors le DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Proposition - Limites et équivalents

- ▶ Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a , avec $f(a) = a_0$.
- ▶ Si $n \geq 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a , de dérivée a_1 .
- ▶ Le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a , ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_p + a_{p+1}h + \dots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geq p$

alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Proposition - Limites et équivalents

- ▶ Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a , avec $f(a) = a_0$.
- ▶ Si $n \geq 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a , de dérivée a_1 .
- ▶ Le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a , ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \dots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geq p$

alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$.

Remarque Généralisation en $+\infty$.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Proposition - Limites et équivalents

- ▶ Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a , avec $f(a) = a_0$.
- ▶ Si $n \geq 1$, f (ou prolongement) est dérivable en a , de dérivée a_1 .
- ▶ Le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut !) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a , ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \dots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p}))$$

avec $a_p \neq 0$ et $n \geq p$

alors $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_p h^p$.

Remarque Généralisation en $+\infty$.

Démonstration

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attention à la généralisation. . .

Attention. A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Alors } f \text{ admet un } DL_{99} \text{ en } 0$$

($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Attention à la généralisation. . .

Attention. A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Alors } f \text{ admet un } DL_{99} \text{ en } 0$$

($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Savoir-faire. Obtenir un $DL_n(a)$ d'une fonction f

On se ramène usuellement en 0 :

- Pour obtenir un DL_n en a de f , on pose $h = x - a$, on effectue un DL_n en 0 de $g(h) = f(a + h)$ puis on remplace h par $x - a$.
- Pour obtenir un DL_n en ∞ de f , on pose $t = 1/x$, on effectue un DL_n en 0 de $g(t) = f(1/t)$ puis on remplace t par $1/x$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

2.5. Algèbre des relations de comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

IL SUFFIT DONC DE SAVOIR OBTENIR LES $DL_n(0)$

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

⇒ $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

► Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

- ▶ Définition : $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
- ▶ Unicité !

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que la $DL_n(a)$ (de f) ?

► Définition : $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n) =$
 $\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

► Unicité !

► Propriété immédiate : parité, limite et dérivabilité en a .

► Fonctions usuelles :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

⇒ $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et
opérations pour des
développements
asymptotiques de
fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young

⇒ $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- ▶ Stabilité (simple) par combinaison linéaire

⇒ $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- ▶ Stabilité (simple) par combinaison linéaire
- ▶ Pour la multiplicité ou la composition :
anticiper (!!) les calculs et ne pas tout calculer

⇒ $DL_n(\alpha)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

Conclusion

Objectifs

⇒ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- ▶ Stabilité (simple) par combinaison linéaire
- ▶ Pour la multiplicité ou la composition :
anticiper (!!) les calculs et ne pas tout calculer
- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)

⇒ $DL_n(a)$ (de f) ?

⇒ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

$\Rightarrow DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et
manipuler des
 $DL_n(a)$ (de f)

Objectifs

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que le $DL_n(a)$ (de f) ?

$\Rightarrow$ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : chapitre 23 : Développements limités

4. Applications

- Exercice n° 471 & 474

- TD de jeudi :

8h-10h : 466 (impairs), 467 (pairs), 472, 475, 477, 479, 481

10h-12h : 466 (pairs), 467 (impairs), 470, 476, 484, 480, 482

1. Problèmes

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Rappel : le cas des suites

2.2. Définitions

2.3. Relations d'équivalence.
Relation de préordre

2.4. Echelle de comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

2.5. Algèbre des relations de
comparaison

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés