

⇒ Exploiter des *DL*

⇒ Exploiter des *DL*)

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités**
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

**3.3. Existence de
développements limités**

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

On cherche maintenant les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles.

Théorème - Premières formules

Les fonctions $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ admettent des DL_n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnés par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

On cherche maintenant les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles.

Théorème - Premières formules

Les fonctions $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$ admettent des DL_n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnés par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F')

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F')

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F')

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F')

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Corollaire - *Arctan*

$$\operatorname{Arctan} x =_0 x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Fonctions usuelles : primitivisation

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F')

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Corollaire - Arctan

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Démonstration

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Attention - Mais on ne peut pas dériver !!

Si f est dérivable, l'existence d'un DL_n pour f n'implique pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f' .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet un DL_{99} en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Attention - Mais on ne peut pas dériver !!

Si f est dérivable, l'existence d'un DL_n pour f n'implique pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f' .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors f admet un DL_{99} en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque Mais tout n'est pas perdu...

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K , n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Théorème - Formule de Taylor-Young

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K , n fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Corollaire - Condition suffisante simple

Toute fonction n fois dérivable en a admet un DL_n en a , donné par la formule de Taylor-Young.

Ce résultat permet de retrouver les DL précédemment obtenus, mais également ceux d'autres fonctions usuelles :

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \text{ (ou } o(x^{2p+1}))$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \text{ (ou } o(x^{2p+2}))$$

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Démonstration

Fonctions usuelles : Formule de Taylor-Young

Proposition - Développements limités usuels en 0

On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Démonstration

Remarque Composition des DL = composition de polynômes

Application

Exercice

Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

⇒ Exploiter des *DL*)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

**3.3. Existence de
développements limités**

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Application

Exercice

Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

⇒ Exploiter des DL)

Savoir-faire. DL des fonctions de référence en une autre valeur

Supposons que $x \rightarrow a$. Alors $h = x - a \rightarrow 0$. On a respectivement :

- ▶ $\exp x = \exp(a + h) = e^a \exp(h) = e^a \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \dots\right)$
- ▶ $\ln x = \ln(a + h) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \dots$
- ▶ $\cos x = \cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos a - h \sin a - \frac{h^2}{2} \cos a + \frac{h^3}{6} \sin a + \dots$
- ▶ $\operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(a + h) = \operatorname{sh} a \cosh h + \cosh a \operatorname{sh} h = \operatorname{sh} a + h \cosh a + \frac{h^2}{2} \operatorname{sh} a + \dots$
- ▶ $x^\alpha = (a + h)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{h}{a}\right)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1} h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a^{\alpha-2} h^2 + \dots$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction



⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations**
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a , obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n .
(résultat encore valable en ∞)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a , obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n .
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Combinaison linéaire

Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a , obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n .
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Exercice

Donner un DL_3 en 0 de $\cos x + 2 \sin(-x)$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Remarque Multiplication de polynôme.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Proposition - Produit

Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Remarque Multiplication de polynôme.

Exercice

Donner le DL_3 en 0 de $e^x\sqrt{1+x}$ et le DL_4 en 0 de $\sin^2 x$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Composition

Soient $f : I \rightarrow K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0,
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$
(termes non significatifs).

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Composition

Soient $f : I \rightarrow K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0,

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= a_0 + a_1(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^2 + \dots \\ &\quad + a_n(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Remarque Comment s'y prendre

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Composition

Soient $f : I \rightarrow K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= a_0 + a_1(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^2 + \dots \\ &\quad + a_n(b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Remarque Comment s'y prendre
Démonstration

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Proposition - Composition

Soient $f : I \rightarrow K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$.

On suppose que f admet un DL_n en 0,
 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$.

Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) \\ &\quad + a_2(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^2 + \cdots \\ &\quad + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$
(termes non significatifs).

Exercice

Donner un DL_4 en 0 de $\ln(\cos x)$.

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Proposition - Inverse

Si f admet un DL_n en 0, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$,

et $f(0) = a_0 \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un DL_n en 0 obtenu en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + \dots + (-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n) \right) \\ &\text{où } u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$
(termes non significatifs).

En fait, il s'agit d'un corollaire de la proposition précédente. Il faut plus le prendre comme un savoir-faire.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Tangente en 0

⇒ Exploiter des DL)

Exercice

Donner le DL_5 en 0 de $\tan x$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Tangente en 0

⇒ Exploiter des DL

Exercice

Donner le DL_5 en 0 de $\tan x$.

Corollaire - $DL_3(0)$ de $\tan$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Savoir-faire

Truc & Astuce pour le calcul. Méthode (Bilan)

Pour faire le $DL_n(a)$ de f .

1. On évalue (rapidement) la valeur numérique de $f(a)$ (elle peut être nulle ou non). On garde le résultat auprès de soi.
2. On fait le changement de variable
 - ▶ $x = a + h$ avec $x \rightarrow a$ ssi $h \rightarrow 0$ pour $a \in \mathbb{R}$
 - ▶ $x = \frac{1}{y}$ avec $x \rightarrow \infty$ ssi $y \rightarrow 0$ pour $a = \pm\infty$
3. On factorise par $f(a)$.
Selon la nature de f , il peut y avoir des simplification.
Normalement, on retrouve nécessairement des $DL_n(0)$ connus.
4. Il peut y avoir des compositions : $(1 + U)^n$ ou $\frac{1}{1+U}$, $\ln(1 + U)$... avec $U(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (composition).
5. Beaucoup de développements. Comme d'habitude : on n'écrit pas trop, et on associe les coefficients au monôme h^k .

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction



⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

Définition - Développement limité généralisé

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n s'il existe $Q, R \in K[X], P, S \in K_n[X]$ tels que :

$$\text{en } 0, f(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n)$$

$$\text{en } \pm\infty, f(x) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^* (= \deg Q \text{ ou } \deg R)$ tel que, $x^p f(x)$
en 0, $\frac{1}{x^p} f(x)$ en $\pm\infty$, admette un DL_{n+p}

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Définition - Développement limité généralisé

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n s'il existe $Q, R \in K[X], P, S \in K_n[X]$ tels que :

$$\text{en } 0, f(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n)$$

$$\text{en } \pm\infty, f(x) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^* (= \deg Q \text{ ou } \deg R)$ tel que, $x^p f(x)$ en 0, $\frac{1}{x^p} f(x)$ en $\pm\infty$, admette un DL_{n+p}

Exemple Retour sur l'exemple original : $\frac{e^x-1}{\sin x}$ autour de $x = -\pi$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Définition - Développement asymptotique

On dit que f admet un développement asymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout k , $f_k(x) = o(f_{k-1}(x))$.

On peut par exemple avoir $f_k(x) = g(x)^k$ où $g(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($g(x) = x^\alpha$ en 0 ($\alpha > 0$), $g(x) = e^{-x}$ en $+\infty$...).

$f_n(x)$ s'appelle la précision du DA .

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Définition - Développement asymptotique

On dit que f admet un développement asymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout k , $f_k(x) = o(f_{k-1}(x))$.

On peut par exemple avoir $f_k(x) = g(x)^k$ où $g(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($g(x) = x^\alpha$ en 0 ($\alpha > 0$), $g(x) = e^{-x}$ en $+\infty$...).

$f_n(x)$ s'appelle la précision du DA .

Exercice

Déterminer un DA en 0 de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ à la précision $x \ln x$, puis à la précision x^3 .

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Savoir-faire. La force des développements limités

Les DL permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Savoir-faire. La force des développements limités

Les *DL* permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

On commence toujours par se ramener en 0 pour utiliser les *DL* usuels.

Exercice

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x \right) \frac{1}{x^2}$.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Exercice

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Exercice

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e.$$

Exercice

Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos 3x}}.$

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes
2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions
3. Développements limités
 - 3.1. Définitions
 - 3.2. Propriétés
 - 3.3. Existence de développements limités
 - 3.4. Opérations
 - 3.5. Généralisation
4. Applications des DL
 - 4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)
 - 4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Savoir-faire. Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

Les DL permettent d'avoir directement des résultats sur le comportement local d'une fonction plus précis que la limite ou l'équivalent en un point.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Proposition - Exploitation graphique d'un *DL* en a

Si f admet en a un DL_k ($k \geq 2$) de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

alors f est prolongeable par continuité en a , de prolongement dérivable en a , l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $y = a_0 + a_1(x - a)$, le signe de a_k et la parité de k donnent, localement, au voisinage de a , les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Proposition - Exploitation graphique d'un *DL* en a

Si f admet en a un DL_k ($k \geq 2$) de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_k(x - a)^k + o((x - a)^k)$$

alors f est prolongeable par continuité en a , de prolongement dérivable en a , l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $y = a_0 + a_1(x - a)$, le signe de a_k et la parité de k donnent, localement, au voisinage de a , les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

Remarque « Seulement » un *DL* d'ordre 1.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$. Quel est son domaine de définition ?

Montrer qu'elle se prolonge de manière continue et dérivable en

1. Donner l'équation de la tangente ainsi que les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Préciser également le comportement de f aux autres bornes du domaine de définition.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Proposition - Exploitation graphique d'un *DL* en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k

($k \geq 1$) de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Proposition - Exploitation graphique d'un *DL* en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k

($k \geq 1$) de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

Remarque « Seulement » un *DL* d'ordre 0.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des *DL*)

Proposition - Exploitation graphique d'un *DL* en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k ($k \geq 1$) de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

Remarque « Seulement » un *DL* d'ordre 0.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1) \ln \frac{x-1}{x+1}$.

Quel est son domaine de définition ?

Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation ainsi que la position relative par rapport à la courbe.

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Objectifs

- ⇒ Généraliser et exploiter des DL
- ⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)

⇒ Exploiter des *DL*)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .

⇒ Exploiter des *DL*)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .
- ▶ Position relative au voisinage d'un point (extremum...).

⇒ Exploiter des *DL*

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des *DL*

- ▶ Développement asymptotique généralisée (sous d'autres formes que polynomiale)
- ▶ Calculer des limites, des équivalents. . .
- ▶ Position relative au voisinage d'un point (extremum...).
- ▶ Equation de la tangente ou de l'asymptote. Position relative.

⇒ Exploiter des *DL*)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Objectifs

- ⇒ Généraliser et exploiter des DL
- ⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

- ⇒ Généraliser et exploiter des DL
- ⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)
 - ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des DL

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- ▶ Stabilité (simple) par combinaison linéaire

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

Objectifs

⇒ Généraliser et exploiter des DL

⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(a)$ (de f)

- ▶ Deux méthodes : primitivisation (avec une référence) ou Taylor-Young
- ▶ Stabilité (simple) par combinaison linéaire
- ▶ Pour la multiplicité ou la composition :
anticiper (!!) les calculs et ne pas tout calculer

⇒ Exploiter des DL

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction

⇒ Exploiter des DL)

Objectifs

- ⇒ Généraliser et exploiter des DL
- ⇒ Obtenir et manipuler des $DL_n(\alpha)$ (de f)

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Structure algébrique de l'ensemble des polynômes
 - 1. Problème & 2. Généralités
- ▶ Exercice n° 478 & 485

1. Problèmes

2. Vocabulaire

3. Développements
limités

3.1. Définitions

3.2. Propriétés

3.3. Existence de
développements limités

3.4. Opérations

3.5. Généralisation

4. Applications des
 DL

4.1. Recherche de limites et
d'équivalents (suite ou fonction)

4.2. Etude locale d'une fonction