



Leçon 68 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Leçon 68 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Problème Polynômes et calculs algébriques

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

Problème Degré infini et séries formelles

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Problème Polynômes et calculs algébriques

Problème Lois sur les polynômes

Problème Expression algébrique

Problème Degré infini et séries formelles

Problème Dérivation algébrique ?

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la
structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- ▶ $(E, +)$, où $+$ désigne l'addition usuelle des suites, est un sous-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +)$ car $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et la différence de deux suites nulles à partir d'un certain rang est une suite nulle à partir d'un certain rang.

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- ▶ $(E, +, \cdot)$ est alors un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de vecteur nul la suite nulle.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- On définit également le produit de Cauchy de deux éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E par :
- $$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{\substack{k=0 \\ p+q=n}}^n a_k b_{n-k} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q$$
- $\times$ est interne dans E car
- $$\exists N_1 \mid k \geq N_1 \Rightarrow a_k = 0, \exists N_2 \mid k \geq N_2 \Rightarrow b_k = 0,$$
- d'où pour $n \geq N_1 + N_2 - 1, k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $k \geq N_1$ ou $n - k \geq N_2$ donc $c_n = 0$.

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Heuristique

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

- On vérifie alors que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif :
 $\times$ est commutative ;

$\times$ est associative : en posant, pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 éléments de E , $(d_n) = (a_n) \times (b_n)$ et $(f_n) = (d_n) \times (c_n)$ on a

$$f_n = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} d_p c_q = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \left(\sum_{\substack{(\ell,m) \in \mathbb{N}^2 \\ \ell+m=p}} a_\ell b_m \right) c_q =$$

$$\sum_{\substack{(\ell,m,q) \in \mathbb{N}^3 \\ \ell+m+q=n}} a_\ell b_m c_q$$

Par commutativité et symétrie du résultat on obtient :

$$(a_n) \times \left((b_n) \times (c_n) \right) = \left((b_n) \times (c_n) \right) \times (a_n) = (f_n) =$$

$$\left((a_n) \times (b_n) \right) \times (c_n)$$

L'élément neutre est $\epsilon = (1, 0, 0, \dots)$ en effet pour

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, en posant $(c_n) = \epsilon \times (a_n)$ on

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$



$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique. Problème opératoire. Mise en place de la structure

E ensemble des suites d'élts de $\mathbb{K}$
nulles à partir d'un certain rang.

► De plus pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot (a_n) \times (b_n) = (\lambda \cdot (a_n)) \times (b_n) = (a_n) \times (\lambda \cdot (b_n))$$

On dit que $(E, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

L'indéterminée X

Définition - Notation de Kronecker

On utilise le symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On a alors $\epsilon = (\delta_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$.

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Polynôme

On pose $X = (\delta_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$, On vérifierait que $X^p = (\delta_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$.

On écrira désormais $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ sous la forme

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

où $X^0 = \epsilon$ est identifié à 1.

On identifiera le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda\epsilon = (\lambda, 0, 0, \dots)$ (on a une bijection évidente entre $\mathbb{K}$ et les suites nulles à partir du rang 1).

On trouve aussi l'écriture $\sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ où $a_k = 0$ pour $k > n$ (puisque'il s'agit d'une suite nulle à partir d'un certain rang).

On pourra écrire $[P]_k$ pour désigner a_k , le nombre devant X^k dans P .

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si
 $\forall n \in \mathbb{N}, [P]_n = [Q]_n$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si
 $\forall n \in \mathbb{N}, [P]_n = [Q]_n$

On a les règles de calcul suivantes, qui donne à $\mathbb{K}[X]$, une
structure d'espace vectoriel

Théorème - $\mathbb{K}[X]$, comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
($\mathbb{K}[X], +, \cdot$) est un $\mathbb{K}$ -e.v. de vecteur nul le polynôme 0

Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ on a

$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$ ($a_k = 0$ si $k > n$, $b_k = 0$ si $k > m$)

$$\lambda P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Egalité de polynômes

On dit que les polynômes P et Q sont égaux, noté $P = Q$ si
 $\forall n \in \mathbb{N}, [P]_n = [Q]_n$

On a les règles de calcul suivantes, qui donne à $\mathbb{K}[X]$, une structure d'espace vectoriel

Théorème - $\mathbb{K}[X]$, comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
 $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. de vecteur nul le polynôme 0

Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n, b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$\lambda P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

Remarque - Linéarité de $P \mapsto [P]_k$.

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$

le polynôme $1 = X^0$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n, b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2: i+j=k} a_i b_j$$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

La structure...

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$

le polynôme $1 = X^0$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n, b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2: i+j=k} a_i b_j$$

Corollaire - Algèbre $\mathbb{K}[X]$

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

La structure...

Théorème - Anneau $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour $\times$

le polynôme $1 = X^0$. Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ on a

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \quad (a_k = 0 \text{ si } k > n, b_k = 0 \text{ si } k > m)$$

$$P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \text{avec } c_k = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2: i+j=k} a_i b_j$$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Corollaire - Algèbre $\mathbb{K}[X]$

$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

Attention. $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas une algèbre

Ne cherchez pas à réduire $\mathbb{K}[X]$ de manière à avoir une algèbre
de dimension finie. $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par multiplication (sauf
si $n \leq 1$)

Expression formelle

Savoir-faire. Expression formelle

Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P + Q$ et $P \times Q$ aussi et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$[P + Q]_k = [P]_k + [Q]_k,$$

$$[PQ]_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} [P]_i [Q]_j = \sum_{i=0}^k [P]_i [Q]_{k-i}$$

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Expression formelle

Savoir-faire. Expression formelle

Si P et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P + Q$ et $P \times Q$ aussi et $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$[P + Q]_k = [P]_k + [Q]_k,$$

$$[PQ]_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} [P]_i [Q]_j = \sum_{i=0}^k [P]_i [Q]_{k-i}$$

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Heuristique - Ce qui compte ce sont les relations algébriques

Beaucoup d'objets mathématiques font partis d'un anneau (avec addition et multiplication des éléments).

Il est alors parfois possible de faire une identification entre cette anneau et les relations associés et l'anneau des polynômes avec les mêmes relations.

On se rend compte que la connaissance sur l'anneau polynômes nous éclaire alors autrement. D'une certaine façon *l'anneau des polynômes est l'anneau des relations.*

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque Formule du binôme

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Exemple Calculer A^{100} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque Formule du binôme

Remarque $\mathbb{K}[X]$ anneau euclidien

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

Exemple Composition

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

Exemple Composition

Remarque Notation

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Définition - Composition polynomiale

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme composé $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$$

Exemple Composition

Remarque Notation

Exercice

Comment exprimer $[P \circ Q]_k$ en fonction des $([P]_i)$ et $([Q]_j)$?

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Définition - Polynômes pair, impair

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Définition - Polynômes pair, impair

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

Exercice

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme pair. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X^2)$.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles de calcul

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Heuristique - $\mathbb{K}$: corps ou anneau ?

Pour définir parfaitement $\mathbb{K}[X]$, il faut pouvoir additionner et multiplier les coefficients a_n entre eux.

Pour que ceci se passe bien, il faut fondamentalement que $\mathbb{K}$ soit (au moins) un anneau.

C'est la définition de l'anneau.

Il arrivera que l'on ait besoin, en outre, que chaque élément a_n soit inversible, par exemple pour faire des divisions euclidiennes de polynômes, ou écrire

$$3X \times P = X^3 \Rightarrow P = \frac{1}{3}X^2$$

Donc nous avons souvent besoin d'un corps $\mathbb{K}$.

$\Rightarrow$ Qu'est-ce que X ?

$\Rightarrow$ Premières règles de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Corps ou anneau ?

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?

Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou
moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Corps ou anneau ?

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?

Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou
moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).

Remarque Quel anneau $\mathbb{K}$?

Enfin, pour certains problèmes (*exemple-type : étude des
polynômes à coefficients entiers*), on se placera sur $\mathbb{Z}[X]$.

Pour d'autres problèmes (*exemple-type : lemme de factorisation
des matrices*), on se placera sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X] \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Corps ou anneau ?

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Remarque Quel corps $\mathbb{K}$?

Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

De temps en temps : $\mathbb{Q}$ (si l'on part de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers), ou
moins trivialement : $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ (corps des inversibles modulo p).

Remarque Quel anneau $\mathbb{K}$?

Enfin, pour certains problèmes (*exemple-type : étude des
polynômes à coefficients entiers*), on se placera sur $\mathbb{Z}[X]$.

Pour d'autres problèmes (*exemple-type : lemme de factorisation
des matrices*), on se placera sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})[X] \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$

Remarque $(\mathbb{K}[X])[Y]$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- Formaliser les opérations classiques de développement. . .

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- ▶ Formaliser les opérations classiques de développement. . .
- ▶ X est une indéterminée, elle représente « TOUT »

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

- ▶ Formaliser les opérations classiques de développement. . .
- ▶ X est une indéterminée, elle représente « TOUT »
- ▶ Degré d'un polynôme : la suite doit être finie !

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$

⇒ Qu'est-ce que X ?

⇒ Premières règles
de calcul

Objectifs

⇒ Présentation des polynômes. Qu'est-ce que X ?

Pour la rentrée

- ▶ Lecture du cours : chapitre 23 : Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

3. Degré & 4. Dérivation

- ▶ Exercice n°596 & 602

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction

2.2. $\mathbb{K}[X]$ comme $\mathbb{K}$ -espace
vectoriel

2.3. $\mathbb{K}[X]$ comme anneau

2.4. Composée

2.5. Remarques sur le corps $\mathbb{K}$