



Leçon 69 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

Leçon 69 - Structure algébrique de l'ensemble des polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Plusieurs définitions

Définition - Degré d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

On appelle *degré* de P , l'entier n que l'on note $\deg P$, c'est aussi

$$\max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

Les scalaires a_k s'appellent les coefficients du polynôme, a_n s'appelle le *coefficient dominant* de P .

On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition

Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition

Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

Savoir-faire. Montrer que $\deg P = k$

Par double inégalité :

- ▶ $\forall i \geq k + 1, [P]_i = 0 \implies \deg P \leq k$
- ▶ $\exists k \text{ tel que } [P]_k \neq 0 \implies \deg P \geq k$

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition

Définition - Polynôme normalisé ou unitaire

Si $[P]_{\deg P} = 1$, P est dit *normalisé* ou *unitaire*.

Définition - Polynôme constant

Les polynômes de degré nul ou égal à $-\infty$ sont appelés *polynômes constants* (et identifiés aux éléments de $\mathbb{K}$).

Savoir-faire. Montrer que $\deg P = k$

Par double inégalité :

- ▶ $\forall i \geq k + 1, [P]_i = 0 \implies \deg P \leq k$
- ▶ $\exists k \text{ tel que } [P]_k \neq 0 \implies \deg P \geq k$

Définition - Monôme

λX^k est un *monôme*.

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Proposition - Arithmétique des degrés

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \text{ avec égalité si } \deg P \neq \deg Q$$

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \quad ((P, Q) \neq (0, 0)).$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Proposition - Arithmétique des degrés

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \text{ avec égalité si } \deg P \neq \deg Q$$

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \quad ((P, Q) \neq (0, 0)).$$

Démonstration

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Proposition - Arithmétique des degrés

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \deg \lambda P = \deg P$$

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \text{ avec égalité si } \deg P \neq \deg Q$$

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \quad ((P, Q) \neq (0, 0)).$$

Démonstration

Savoir-faire. Égalité polynomiale

Par définition, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients.

On procède donc souvent en deux temps :

1. On étudie les degrés
2. On regarde (ensuite) les coefficients

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Degré échelonné

Soit $(P_k)_{k \in I}$ une famille de polynômes.

On dit que la famille $(P_k)_{k \in I}$ est échelonnée ou est de degrés échelonnés ssi $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \deg P_i \neq \deg P_j$.

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Degré échelonné

Soit $(P_k)_{k \in I}$ une famille de polynômes.

On dit que la famille $(P_k)_{k \in I}$ est échelonnée ou est de degrés échelonnés ssi $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \deg P_i \neq \deg P_j$.

Proposition - Degré échelonné (ou étagée)

Soit $(P_k)_{k \in I}$, une famille de polynômes de degrés échelonnés.
Alors $(P_k)_{k \in I}$ est une famille libre.

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Degré échelonné

Soit $(P_k)_{k \in I}$ une famille de polynômes.

On dit que la famille $(P_k)_{k \in I}$ est échelonnée ou est de degrés échelonnés ssi $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \deg P_i \neq \deg P_j$.

Proposition - Degré échelonné (ou étagée)

Soit $(P_k)_{k \in I}$, une famille de polynômes de degrés échelonnés.
Alors $(P_k)_{k \in I}$ est une famille libre.

Démonstration

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Corollaire - Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension finie

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à $n + 1$.

Une base (dite canonique) est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Corollaire - Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension finie

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à $n + 1$.

Une base (dite canonique) est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Démonstration

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que
 $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$

Démonstration

Corollaire - Régularité

Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3, P \neq 0$. Alors
 $PQ = PR \Rightarrow Q = R.$

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que
 $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$

Démonstration

Corollaire - Régularité

Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3, P \neq 0$. Alors
 $PQ = PR \Rightarrow Q = R.$

Vrai même si P n'est pas inversible.

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Premières opérations polynomiales

Comme le dévoile la démonstration : les résultats suivants sont indépendants du corps $\mathbb{K}$ considéré :

Proposition - Anneau intègre (sans diviseur de 0)

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, c'est-à-dire que
 $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, PQ = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$

Démonstration

Corollaire - Régularité

Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3, P \neq 0$. Alors
 $PQ = PR \Rightarrow Q = R.$

Vrai même si P n'est pas inversible.

Démonstration

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Le groupe $(\mathbb{K}[X]^*, \times)$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Eléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Le groupe $(\mathbb{K}[X]^*, \times)$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Éléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$

Les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Démonstration

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de P l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

On peut la noter $v_X(P)$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de P l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

On peut la noter $v_X(P)$

Exemple Degré et valuation de $P = 3(X + 1)^2 - 3(X - 1)$?

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de P l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

On peut la noter $v_X(P)$

Exemple Degré et valuation de $P = 3(X + 1)^2 - 3(X - 1)$?

Remarque Elargissement de définition

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Valuation d'un polynôme

On appelle valuation de P l'entier $\min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

On peut la noter $v_X(P)$

Exemple Degré et valuation de $P = 3(X + 1)^2 - 3(X - 1)$?

Remarque Elargissement de définition

Savoir-faire. Montrer que $v_X(P) = k$

Par double inégalité :

- ▶ $\forall i \leq k + 1, [P]_i = 0 \implies v_X(P) \geq k$
- ▶ $\exists k \text{ tel que } [P]_k \neq 0 \implies v_X(P) \leq k$

Exercice

Que peut-on dire de $v_X(P \times Q)$?

$\Rightarrow$ Degré

$\Rightarrow$ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Définition - Polynôme dérivé

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On définit le *polynôme dérivé* de P par

$$P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^n ka_kX^{k-1}$$

Si P est constant, on pose $P' = 0$.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Degré et dérivation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg P \geq 1$ alors $\deg P' = (\deg P) - 1$.

Et également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P']_k = (k + 1)[P]_{k+1}$.

En particulier, $[P']_{\deg P - 1} = \deg P \times [P]_{\deg P}$.

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Degré et dérivation

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\deg P \geq 1$ alors $\deg P' = (\deg P) - 1$.

Et également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P']_k = (k + 1)[P]_{k+1}$.

En particulier, $[P']_{\deg P - 1} = \deg P \times [P]_{\deg P}$.

Démonstration

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Théorème - Linéarité de la dérivation

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ on a :

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(P_1 P_2 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^n P'_i \prod_{j=1, j \neq i}^n P_j \text{ et } (P^n)' = nP'P^{n-1}$$

$$(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Théorème - Linéarité de la dérivation

Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ on a :

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

$$(P_1 P_2 \dots P_n)' = \sum_{i=1}^n P'_i \prod_{j=1, j \neq i}^n P_j \text{ et } (P^n)' = nP'P^{n-1}$$

$$(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$$

Démonstration

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geq 0, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Dérivation d'ordre k

Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geq 0, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Définition - Dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k :

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall k \geq 0, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$$

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Démonstration

En fait, on fait la même démonstration que pour le binôme de Newton (récurrence, décalage de somme, triangle de Pascal). On peut aussi exploiter la formule de Taylor et un produit de polynôme puis identifier. . .

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

⇒ Autour de la dérivation de polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$ et éléments inversibles

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation d'opérations polynomiales

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Cas essentiel (centré en a) !

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Dérivation du monôme

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$[(X - a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Cas essentiel (centré en a) !

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Dérivation du monôme

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$[(X - a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Dérivation du polynôme P

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!} [P]_{j+k}$$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Proposition - Dérivation du polynôme P

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$[P^{(k)}]_j = \frac{(j+k)!}{j!} [P]_{j+k}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Savoir-faire. Passer d'une relation entre dérivées de P à une relation entre coefficients

Souvent, on cherche à résoudre une équation différentielle dont l'inconnue est un polynôme P .

1. On précise la notation du degré de P (n)
2. On remplace P, P' par leur expression sommatoire
3. On fait les multiplications prévues dans l'équation (par $X, X^2 \dots$)
4. On « explose » toutes les sommes, puis on réalise dans chacune le changement de variable de manière à trouver des $\sum_h \alpha_h X^h$.

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Savoir-faire. Passer d'une relation entre dérivées de P à une relation entre coefficients

Souvent, on cherche à résoudre une équation différentielle dont l'inconnue est un polynôme P .

5. On recolle le tout en une seule somme du type

$$\sum_{h=a_1}^{a_2} (\alpha_h + \beta_h + \dots) X^h.$$

Souvent, il y a des conditions de bords. Dans la somme $(\alpha_h + \beta_h + \dots)$, il ne doit pas y avoir un seul X

6. Par unicité de l'écriture polynomiale, on trouve que pour tout $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\alpha_h + \beta_h + \dots = 0$
(n équations à résoudre. Elles sont souvent récurrence : α_{h-2} en fonction de α_h , par exemple. .)

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

Application Résoudre $P'' + P' + \lambda X^2 P = 0$ et
 $X^2 P'' + P' + \lambda P = 0$

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Exercice

On considère la suite de polynômes définie par récurrence par

$$P_0 = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (1 + X^2)P'_k - (2k + 1)XP_k.$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_k .
3. Etudier la parité de P_k .

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

- Définitions et critères d'encadrement

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

- ▶ Définitions et critères d'encadrement
- ▶ Arithmétique des degrés : $\deg(P + Q)$, $\deg(P \times Q)$ et $\deg(P \circ Q)$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

- ▶ Définitions et critères d'encadrement
- ▶ Arithmétique des degrés : $\deg(P + Q)$, $\deg(P \times Q)$ et $\deg(P \circ Q)$
- ▶ $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre ! (donc régularité...)

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

⇒ Degré et valuation d'un polynôme

- ▶ Définitions et critères d'encadrement
- ▶ Arithmétique des degrés : $\deg(P + Q)$, $\deg(P \times Q)$ et $\deg(P \circ Q)$
- ▶ $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre ! (donc régularité...)
- ▶ Propriété des valuations

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

► C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} X^k$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

- ▶ C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} X^k$
- ▶ Donc : perte d'une unité pour le degré

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

- ▶ C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} X^k$
- ▶ Donc : perte d'une unité pour le degré
- ▶ Résultat classique : linéarité, dérivation d'un produit, formule de Leibniz. . .

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

► C'est la transformation : $\Delta : P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} X^k$

- Donc : perte d'une unité pour le degré
- Résultat classique : linéarité, dérivation d'un produit, formule de Leibniz. . .
- A retenir :

$$[(X - a)^n]^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \\ n! & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications

Objectifs

- ⇒ Degré et valuation d'un polynôme
- ⇒ Autour de la dérivation de polynômes

Pour la rentrée

- ▶ Lecture du cours : chapitre 24 : Fonctions polynomiales et racines
- ▶ Exercice n° 590 & 598
- ▶ TD :
 - 8h-10h : N°591, 593, 600, 605, 610, 616
 - 10h-12h : N°592, 594, 601, 606, 611, 617

⇒ Degré

⇒ Autour de la
dérivation de
polynômes

1. Problèmes

2. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

3. Degré

3.1. Définition

3.2. Arithmétique des degrés

3.3. Intégrité et inverses

3.4. Valuation

4. Dérivation d'un
polynôme

4.1. Définition

4.2. Dérivation

4.3. Dérivation d'ordre supérieur

4.4. Applications