CPGE MPSI Le 25.05.17
2016-2017

Devoir Surveillé n°10
CORRECTION

Exercice

1. $\lim \dfrac{\frac{e^{-2n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim ne^{-2n} = 0$, par croissance comparée. /1

$$\boxed{\text{Donc } \frac{e^{-2n}}{n} = o(\tfrac{1}{n^2})}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Piste de recherche...
On rappelle que $\mathrm{ch}(n) = \frac{e^n+e^{-n}}{2} \to +\infty$, son terme dominant est $\frac{e^n}{2}$, nous le mettrons en facteur.
Comme il y a du n en exposant et à l'intérieur, donc on va exploiter la formule $a^b = \exp(b\ln(a))$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(\frac{e^n+e^{-n}}{2})\right) - e = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left[\frac{e^n}{2}\left(1+e^{-2n}\right)\right]\right) - e\\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln e^n - \ln 2 + \ln\left(1+e^{-2n}\right)\right)\right) - e\\
&= \exp\left(1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\ln(1+e^{-2n})\right) - e\\
&= e \times \left[\exp\left(-\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\ln(1+e^{-2n})\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

Enfin, $e^{-2n} \to 0$, donc $\dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-2n}) = \dfrac{e^{-2n}}{n} + o(\frac{e^{-2n}}{n})$. Donc $-\dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n}\ln(1+e^{-2n}) \to 0$.
Par composition avec $e^u - 1 = u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ si $u \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\ln(1+e^{-2n})\right) - 1\\
&= -\frac{\ln 2}{n} + \frac{e^{-2n}}{n} + \frac{(\ln 2)^2}{2n^2} + o(\frac{e^{-2n}}{n}) + o(\frac{1}{n^2})\\
&= -\frac{\ln 2}{n} + \frac{(\ln 2)^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

d'après le résultat de croissance comparée vue en question 1.
On a donc /3

$$\boxed{u_n = -\frac{e\ln 2}{n} + \frac{e(\ln 2)^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$$

3. La suite (u_n) est négative à partir d'un certain rang, elle est équivalente à $v_n = \frac{-e\ln 2}{n}$.
Donc les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont le même comportement.
Or la série $\sum v_n$ diverge d'après le critère de Riemann. /2

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n = (\mathrm{ch}(n))^{1/n} \text{ diverge}}$$

Problème

Dans tout le problème, on fixe un intervalle fini $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement positive.
Pour toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on pose

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$

I. Quadrature

Pour tout entier positif n, on note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace des polynômes de degré strictement inférieur à n.
Dans cette partie, on fixe n points $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts de I.

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_m[X]) = m + 1$, donc *\/0,5*

$$\boxed{\dim(E) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n}$$

2. A chaque $x \in I$, on associe la forme linéaire $\epsilon_x : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \epsilon_x(P) = P(x).$$

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \epsilon_i$ soit l'élément nul de E^*.
Donc pour tout polynôme $P \in E$, $\Phi(P) = 0$.
Prenons en particulier le polynôme $L_i = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - x_k)$. Alors
— $L_i \in E$, car $\deg(L_i) = n - 1$.
— Alors pour tout $k \neq i$, $\epsilon_k(L_i) = L_i(x_k) = 0$ car x_k est bien une racine de L_i.
— $\epsilon_i(L_i) = \prod_{k\neq i}(x_i - x_k) \neq 0$
Par linéarité :

$$0 = \Phi(L_i) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \epsilon_k(L_i) = 0 \cdots + 0 + \mu_i \epsilon_i(L_i) + 0 + \cdots$$

Donc nécessairement : $\mu_i = 0$, car $\epsilon_i(L_i) \neq 0$, et comme ceci est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. *\/1*

La famille $(\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n})$ est une famille libre de E^*.

En outre $\dim(E^*) = \dim E = n$, cette famille est composée de n éléments, donc *\/0,5*

$$\boxed{\text{La famille } (\epsilon_{x_1}, \ldots, \epsilon_{x_n}) \text{ est une base de l'espace dual } E^*}$$

3. Cette famille est donc génératrice de E^*.
Or $\mathcal{I}_{|E}$ est une forme linéaire de E, donc $\mathcal{I}_{|E} \in E^*$.
Ainsi il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que : $\mathcal{I}_{|E} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_i$.
En prenant comme variable P *\/2*

$$\boxed{\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n (\text{dépendant seulement des } x_i)\ \mid \forall\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \mathcal{I}(P) = \mathcal{I}_{|E}(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) \qquad (*)}$$

II. Polynômes orthogonaux

On note $\mathcal{C}$ l'espace $\mathbb{C}^0(I; \mathbb{R})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1. On note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien une application de $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}$. (forme)
— Elle est symétrique :

$$\forall\ f, g \in \mathcal{C}, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \langle g, f \rangle$$

— Elle est bilinéaire : d'abord linéaire à gauche (par distributivité des produits et linéarité de l'intégrale) :

$$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} f_1, f_2, g \in \mathcal{C}, \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))g(t)\omega(t)\mathrm{d}t$$
$$= \cdots = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$$

Puis, par symétrie, elle est aussi linéaire à droite

— positive :

$$\forall\ f \in \mathcal{C}, \langle f, f\rangle = \int_a^b [f(t)]^2\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

(intégrale d'une fonction positive sur un intervalle avec les bornes dans le bon sens)

— définie : Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_a^b [f(t)]^2\omega(t)\mathrm{d}t = 0$.

Alors comme $t \mapsto f(t)^2\omega(t)$ est continue et positive sur $[a, b]$, on a nécessairement : $\forall\ t \in [a, b],\ f^2(t)\omega(t) = 0$.

Or $\omega(t) > 0$, et donc $f = 0_{[a,b]}$ /2

$$\boxed{\text{Donc la formule } \langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\mathrm{d}t \text{ définit un produit scalaire sur } \mathcal{C}.}$$

On note $\|\cdot\|_\omega$ la norme associée.

Remarques !

Si $[a, b]$ n'est pas réduit à un singleton, alors toute fonction polynomiale nulle sur $[a, b]$ est nécessairement associée au polynôme nul (unique posisbilité)

2. (a) Procédons en deux temps : existence et unicité.

— Considérons la base $(1, X, X^2, \ldots X^{n-1})$ de E. *On note $T_k = X^k$, par la suite*

Appliquons un pseudo-algorithme de Schmitt à cette base de E :

pour i de 0 à $n-1$: $Q_i = T_i - \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}\langle T_i, Q_j\rangle_\omega Q_j$

• Cette construction est sans contradiction : à chaque étape (numéroté i), on construit le polynôme Q_i', à l'aide des polynômes déjà existants $Q_0', Q_1', \ldots Q_{i-1}'$. Seul le polynôme $Q_0 = T_0$ est donné directement.

• Montrons alors, par récurrence, que pour $j < i$, $\langle Q_j, Q_i\rangle_\omega = 0$ et $\deg(Q_i) = i$.

Le résultat est vrai pour $i = 0$ et j vide ($Q_0 = T_0 = 1$).

Supposons qu'il est vrai en i.

Soit $j \leqslant i + 1$, donc par linéarité du produit scalaire :

$$\langle Q_j, Q_{i+1}\rangle = \langle Q_j, T_{i+1}\rangle_\omega - \sum_{h=0}^{i}\langle T_{i+1}, Q_h\rangle_\omega\langle Q_h, Q_j\rangle_\omega = \langle Q_j, T_{i+1}\rangle_\omega - \langle Q_j, T_{i+1}\rangle_\omega = 0$$

Par ailleurs, $T = \displaystyle\sum_{j=0}^{i}\langle T_i, Q_j\rangle_\omega Q_j \in \mathrm{Vect}(Q_0, Q_1, \ldots Q_i) \subset \mathbb{R}_i[X]$,

donc $Q_{i+1} = T_{i+1} - T$ est de degré égal à $i + 1$;

son terme dominant est le même que celui de T_{i+1} i.e. $1X^{i+1}$.

Donc la proposition est vraie en $i + 1$ On a donc démontré l'existence de la famille recherchée (ainsi qu'un procédé constructif pour l'obtenir). /2

— Montrons maintenant l'unicité de cette famille.

Si deux familles (Q_i) et (R_i) vérifie exactement les mêmes relations,

Supposons qu'il existe i tel que $Q_i \neq R_i$.

Donc l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid Q_i \neq R_i\}$ est non vide.

Notons $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid Q_i \neq R_i\}$. Donc $\forall\ j \leqslant i_0$, $Q_j = R_j$ et $Q_{i_0} \neq R_{i_0}$..

$\deg(Q_{i_0} - R_{i_0}) \leqslant i_0 - 1$: $\deg(Q_{i_0}) = \deg(R_{i_0}) = i_0$ et $[Q_{i_0}]_{i_0} = [R_{i_0}]_{i_0} = 1$.

Donc $Q_{i_0} - R_{i_0} \in \mathbb{R}_{i_0-1}[X]$.

Mais par ailleurs, $(Q_0, Q_1, \ldots Q_{i_0-1})$ est une famille libre (degré échelonné) de i_0 vecteurs de $\mathbb{R}_{i_0-1}[X]$. C'en est une base.

Donc il existe $a_0, a_1, \ldots a_{i_0-1} \in \mathbb{R}$ tels que $Q_{i_0} - R_{i_0} = \displaystyle\sum_{j=0}^{i_0-1} a_jQ_j$.

En prenant le produit scalaire par $Q_j = R_j$ (pour $j < i_0$) :

$$0 = \langle Q_{i_0}, Q_j\rangle_\omega + \langle R_{i_0}, Q_j\rangle_\omega = \langle Q_{i_0} - R_{i_0}, Q_j\rangle_\omega = \sum_{h=0}^{i_0-1} a_h\langle Q_h, Q_j\rangle = a_j\|Q_j\|_\omega^2$$

Donc nécessairement $a_j = 0$ et ceci est vrai pour tout $j < i_0$, donc $Q_{i_0} = R_{i_0}$.

On a ainsi une contradiction et donc pour tout i, $Q_i = R_i$. La famille est unique. /2

Il existe une unique famille de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que : i) pour tout entier positif i, P_i est unitaire de degré i. ii) pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\langle P_i, P_j\rangle_\omega = 0$.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\deg(P_i) = i$, donc $(P_0, P_1, \dots P_{n-1})$ est une famille en degré échelonné de E_n, donc elle est libre.
Elle est composée de $n = \dim E$ vecteurs, il s'agit donc d'une base de E_n. */1*

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in N, \text{ la famille } (P_0, ..., P_{n-1}) \text{ forme une base de } E_n = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

(c) Soit $m \geqslant n$ et $U \in E_n$,
Comme $(P_0, ..., P_{n-1})$ forme une base de $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$
il existe $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n$ telle que $T = \sum_{i=0}^{n-1} a_i P_i$.

$$\langle P_m, U\rangle_\omega = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle P_m, P_i\rangle_\omega = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 0 = 0$$

car $i < n \leqslant m$ et donc $P_i \perp P_m$. */1,5*

$$\boxed{\text{Donc pour tout } m \geqslant n,\ P_m \in E_n^\perp}$$

3. Le but de cette question est de montrer que pour tout entier n le polynôme P_n précédent a n racines distinctes dans l'intervalle I.
Pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose que n'est pas le cas et l'on note $y_1, \dots,$ y_k les racines de P_n situées dans I qui sont de multiplicité impaire. Soit enfin le polynôme

$$L = \prod_{i=1}^{k} (X - y_i).$$

(a) P_n est de degré $n - 1$ donc admet au plus n racines.
Par l'absurde, on a supposé que P_n n'admet pas n racines distinctes dans $I = [a, b]$ */1*

$$\boxed{\text{Donc } k, \text{ le nombre de racines de } P \text{ dans } [a, b] \text{ est strictement plus petit que } n}$$

(b) Soit X_0, une racine $f : t \mapsto P_n(t)L(t)$.
alors $P_n(X_0) = 0$ ou $L(X_0) = 0$.
mais si $L(X_0) = 0$, alors $X_0 \in \{y_1, y_2, \dots y_k\}$ et donc également $P_n(X_0) = 0$.
Il y a donc deux options :
— où $L(X_0) = 0$ et X_0 est une racine d'ordre impair de P_n
et donc $f(t) = (t - X_0)^h Q(t)$ avec h pair et $Q(X_0) \neq 0$.
Ainsi f ne change pas de signe en X_0 (même si elle s'annule)
— où $L(X_0) \neq 0$ et X_0 est une racine d'ordre pair de P_n
et donc $f(t) = (t - X_0)^h Q(t)$ avec h pair et $Q(X_0) \neq 0$.
Ainsi f ne change pas de signe en X_0 (même si elle s'annule)
Puis par continuité de f, elle ne peut changer de signe qu'en s'annulant. Or on vient de voir que lorsque f s'annule elle ne change pas de signe. */1,5*

$$\boxed{\text{Donc la fonction } I \to \mathbb{R},\ t \mapsto P_n(t)L(t) \text{ ne change pas de signe.}}$$

(c) Puis $L \in \mathbb{R}_k[X]$, donc $L = \sum_{i=0}^{k} a_i P_i$. Ainsi :

$$\langle P_n, L\rangle_\omega = \sum_{i=0}^{k} a_i \langle P_n, P_i\rangle_\omega = \sum_{i=0}^{k} a_i \times 0 = 0$$

Or f est continue, de signe constant sur $[a, b]$ d'intégrale nulle sur $[a, b]$, donc $f = 0$.
Ainsi f admet une infinité de 0 et on a vu que tout zéro de f est aussi une racine de P_n.
Donc P_n admet une infinité de racines, ce qui est faux. */1,5*

$$\boxed{\text{On a donc une contradiction, ainsi } P_n \text{ admet } n \text{ racines distinctes (d'ordre 1), dans } [a, b]}$$

4. (a) Soit $Q \in \mathcal{C}$, */0,5*

$$\boxed{\langle XP_n, Q\rangle_\omega = \int_a^b (tP_n(t) \times Q(t))\omega(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (P_n(t) \times tQ(t))\omega(t)\mathrm{d}t = \langle P_n, XQ\rangle_\omega}$$

(b) $\deg P_n = n$. Le polynôme XP_n est donc un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
La famille $(P_i)_{i\leqslant n+1}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Donc

$$\exists\ a_k \in \mathbb{R} \mid XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k \qquad \text{avec} \qquad a_k = \frac{\langle XP_n, P_k\rangle_\omega}{\|P_k\|_\omega^2}$$

Or pour $k \geqslant n-2$,

$$a_k = \langle XP_n, P_k\rangle_\omega = \langle P_n, XP_k\rangle_\omega = 0$$

car $\deg(XP_n) \leqslant k+1 < n$, donc $P_n \perp XP_k$.
Et

$$a_{n-1} = \frac{\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega}{\|P_{n-1}\|_\omega^2}, a_n = \frac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega} \text{ et } a_{n+1} = \frac{\langle XP_n, P_{n+1}\rangle_\omega}{\|P_{n+1}\|_\omega^2}$$

Par ailleurs, les polynômes
— XP_n et P_{n+1} ont même terme dominant : $1X^{n+1}$;
— l'écriture : $XP_n = a_{n+1}P_{n+1} + T_n$ avec $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, donc $\deg T \leqslant n < n+1$
correspond exactement à la division euclidienne de XP_n par P_{n+1} ;
par conséquence, $a_{n+1} = 1$, nécessairement.
De même s'il l'on considère :

$$\exists\ b_k \in \mathbb{R} \mid XP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k \qquad \text{avec} \qquad b_k = \frac{\langle XP_{n-1}, P_k\rangle_\omega}{\|P_k\|_\omega^2}$$

on trouve $b_n = \dfrac{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega^2} = 1$
Et donc $\dfrac{\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega^2} = \dfrac{\langle P_n, XP_{n-1}\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega^2} = 1$
Et ainsi : $\langle XP_n, P_{n-1}\rangle_\omega = \|P_n\|_\omega^2$. /3

$$\boxed{\text{Donc } \forall\ n \geqslant 1,\ XP_n = P_{n+1} + \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1}, \text{ avec } \alpha_n = \frac{\langle XP_n, P_n\rangle_\omega}{\|P_n\|_\omega^2} \text{ et} \beta_n = \frac{\|P_n\|_\omega^2}{\|P_{n-1}\|_\omega^2}}$$

III. Quadrature de Gauss

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé. On note $y_1, \ldots y_n$ les racines de P_n.

1. D'après $(*)$, nous connaissons l'existence des (λ_i) tel que

$$\forall\ Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \mathcal{I}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(y_i)$$

Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, alors en faisant la division euclidienne de Q par P_n, on a $Q = TP_n + R$ avec $\deg R < \deg P_n = n$.

$$\mathcal{I}(Q) = \int_a^b T(t)P_n(t)\omega(t)\mathrm{d}t + \mathcal{I}(R)$$

Or $\deg T = \deg Q - \deg(P_n) < 2n - (n+1) = n-1$,
donc $\langle T, P_n\rangle_\omega = 0$ car $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset (\mathrm{vect}(P_n))^\perp$.
Ainsi, $\mathcal{I}(Q) = \mathcal{I}(R) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(y_i)$, car $\deg R < n$.
Or $Q(y_i) = T(y_i)P_n(y_i) + R(y_i) = R(y_i)$ car y_i est une racine de P_n. /2

$$\boxed{\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\ Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \text{ on ait : } \mathcal{I}(Q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(y_i)}$$

2. Notons pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $Q_j = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \dfrac{X - y_i}{y_j - y_i}$,
donc $Q_j(y_k) = 0$ si $y_k \neq y_j$, c'est-à-dire $k \neq j$, alors que $Q_j(y_j) = 1$.
ainsi $\mathcal{I}(Q_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_j(y_k) = \lambda_j \times 1$.

De même, en considérant $T_j = Q_j^2$, on a de même : pour $k \neq j$, $T_j(y_k) = Q_j^2(y_k) = 0$ et

$T_j(y_j) = Q_j^2(y_j) = 1^2 = 1$ ainsi $\mathcal{I}(T_j) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_j(y_k) = \lambda_j \times 1$. /1,5

$$\boxed{\text{Alors, pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = \mathcal{I}\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{X - y_i}{y_j - y_i}\right) = \mathcal{I}\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{(X - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}\right)}$$

Comme la fonction $t \mapsto T_j(t)$ est à valeurs positives, alors $\mathcal{I}(T_j) = \int_a^b T_j(t)\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Mieux : T_j est continue et $T_j(x) > 0$ pour $x \in [a, b] \setminus \{y_1, y_2, \dots y_n\} \neq \emptyset$,

$$\boxed{\text{On en déduit donc que pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j > 0}$$

3. Soit $f : t \mapsto 1$, sur $[a, b]$, f est une fonction polynomiale de degré 1, donc

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(y_j) = \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$$

Bilan : /1

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}$$

Remarques !

En fait, on montre plus largement et de la même manière que si $U_i \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et pour tout $j \neq i$ $U_i(\lambda_j) = 0$ alors que $U(\lambda_i) = 1$, on a $\lambda_i = \mathcal{I}(U_i)$.

Pour tout $g : I \to \mathbb{R}$, on pose : $S_n(g) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(y_i)$.

On veut montrer que pour f fixée, $S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{I}(f)$.

4. On admet ici un théorème de Weierstrass :

   Théorème de (Stone-)Weierstrass :
   Soit $[u, v]$, segment de $\mathbb{R}$ (interalle de $\mathbb{R}$, fermé et borné),
   Toute fonction ϕ continue sur $[u, v]$ est approchée uniformément par l'ensemble des fonctions polynomiales

   Ce théorème signifie exactement : /1

$$\boxed{\forall\ \phi \in \mathcal{C}([u, v]), \forall\ \epsilon > 0, \exists\ P \in \mathbb{R}[X] \mid \sup_{t\in[u,v]} |\phi(t) - P(t)| \leqslant \epsilon}$$

5. Soit $\epsilon > 0$.
   $[a, b]$ est un segment fermé de $\mathbb{R}$, f est continue sur $[a, b]$.
   Donc il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sup_{t\in[a,b]} |\phi(t) - P(t)| \leqslant \epsilon$.
   Or $\forall\ t \in [a, b]$, $|f(t) - P(t)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\phi(t) - P(t)|$. /0,5

$$\boxed{\text{Donc il existe } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall\ t \in [a, b],\ |f(t) - P(t)| < \epsilon}$$

6. Soit $n > \deg(P)$, on a : $\mathcal{I}(P) = S_n(P)$, d'après les questions précédentes. Par inégalité triangulaire :

$$|\mathcal{I}(f) - S_n(f)| = |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P) + S_n(P) - S_n(f)| \leqslant |\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P)| + |S_n(P) - S_n(f)|$$

Puis, par linéarité de l'intégrale :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(P)| = \left|\int_a^b (f(t) - P(t))\omega(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t) - P(t)|\omega(t)\mathrm{d}t \leqslant \epsilon \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$$

De même, par linéarité de la sommation et positivité des λ_i et ϵ :

$$|S_n(P) - S_n(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P - f)(y_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |P(y_i) - f(y_i)| \leqslant \epsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \epsilon \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$$

/2

$$\boxed{\text{Par conséquent : } |\mathcal{I}(f) - S_n(f)| \leqslant 2\epsilon \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}$$

7. La valeur de $2\epsilon \int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t$ peut être choisie, arbitrairement, aussi proche de zéro que l'on veut (par le choix de ϵ). */1*

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} |\mathcal{I}(f) - S_n(f)| = 0}$$

IV. Application

Supposons que l'on cherche à calculer $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

1. La fonction $\varphi(t) = At + B$ est affine, elle vérifie $\varphi(a) = -1$ et $\varphi(b) = 1$, si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} aA + B & = & -1 \\ bA + B & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{2}{b-a} \\ B & = & -\dfrac{a+b}{b-a} \end{array}\right.$$

$\varphi : t \mapsto \frac{2t-a-b}{b-a}$ est bien affine, de classe $\mathcal{C}^1$, bijective (car $b \neq a$). */2*

La bijection réciproque est $\varphi^{-1} : u \mapsto \frac{(b-a)u+a+b}{2}$ Le changement de variable $u = \varphi(t)$ donne */1*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)u + (a+b)}{2}\right) \frac{2\mathrm{d}u}{b-a}}$$

2. On se place donc dans la situation $I = [a, b] = [-1, 1]$ et $\omega : t \mapsto 1$.
On note L_i les polynômes définis comme en partie II, appelés polynôme de Legendre.
Ils vérifient en particulier

i) pour tout entier positif i, L_i est unitaire de degré i.

ii) pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\langle L_i, L_j\rangle_\omega = \int_{-1} 1L_i(t)L_j(t)\mathrm{d}t = 0$.

iii) la relation de récurrence :

$$L_{n+1} = XL_n - \alpha_n L_n - \beta_n L_{n-1}, \text{ avec } \alpha_n = \frac{\langle XL_n, L_n\rangle_\omega}{\|L_n\|_\omega^2}, \beta_n = \frac{\|L_n\|_\omega^2}{\|L_{n-1}\|_\omega^2}$$

On a donc $L_0 = 1$ et donc $\|L_0\|^2 = \int_{-1}^1 \mathrm{d}t = 2$.

Puis $L_1 = XL_0 - \alpha_0 L_0 + 0$, avec $\alpha_0 = \dfrac{\langle X, L_0\rangle}{2} = \dfrac{1}{2}\int_{-1}^1 t\mathrm{d}t = 0$,

donc $L_1 = X$ et $\|L_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}$.

Puis $L_2 = XL_1 - \alpha_1 L_1 - \beta_1 L_0$, avec $\alpha_1 = \dfrac{\langle XL_1, L_1\rangle}{\|L_1\|^2} = \cdots = 0$ et $\beta_1 = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$,

donc $L_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ et $\|L_2\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^4 - \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{1}{9}\right)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{8}{45}$

Puis $L_3 = XL_2 - \alpha_2 L_2 - \beta_2 L_1$, avec $\alpha_2 = \dfrac{\langle XL_2, L_2\rangle}{\|L_2\|^2} = \cdots = 0$ et $\beta_2 = \dfrac{\frac{8}{45}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{15}$,

donc $L_3 = X^3 - \frac{1}{3}X - \frac{4}{15}X = X^3 - \frac{3}{5}X$ */2*

$$\boxed{L_0 = 1 \qquad L_1 = X \qquad L_2 = X^2 - \frac{1}{3} \qquad L_3 = X^3 - \frac{3}{5}X}$$

Remarques !

En fait le polynôme L_n de Legendre est de parité égal à celle de n, donc nécessairement, tous les $\alpha_k = 0$....

Le rapport des normes pour obtenir β_k est simple, s'il se prépare au fur et à mesure

3. On cherche à calculer une approximation de I avec les racines de L_3.

(a) $L_3 = X(X^2 - \frac{3}{5})$, les racines de L_3 sont donc $-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0 et $\sqrt{\frac{3}{5}}$.
Pour calculer les valeurs de λ_i, on exploite la formule vue en III.2.

$$\lambda(0) = \mathcal{I}\left(\frac{(X-\sqrt{\frac{3}{5}})(X+\sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}})(\sqrt{\frac{3}{5}})}\right) = \frac{-5}{3}\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{3}{5})\mathrm{d}t = \frac{-10}{9}+2 = \frac{8}{9}$$

$$\lambda(\sqrt{\frac{3}{5}}) = \mathcal{I}\left(\frac{(X-0)(X+\sqrt{\frac{3}{5}})}{(\sqrt{\frac{3}{5}})(2\sqrt{\frac{3}{5}})}\right) = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}(t^2+\frac{3}{5}t)\mathrm{d}t = \frac{5}{9}$$

$$\lambda(-\sqrt{\frac{3}{5}}) = \mathcal{I}\left(\frac{(X-0)(X-\sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}})(-2\sqrt{\frac{3}{5}})}\right) = \frac{5}{6}\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{3}{5}t)\mathrm{d}t = \frac{5}{9}$$

/1,5

$\boxed{\text{Les racines de } L_3 \text{ sont } 0,\ -\sqrt{\tfrac{3}{5}} \text{ et } \sqrt{\tfrac{3}{5}}\text{ ; les poids respectivement associés sont } \tfrac{8}{9},\ \tfrac{5}{9} \text{ et } \tfrac{5}{9}}$

Remarques !

On vérifie que $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = \frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{8}{9} = \frac{18}{9} = 2 = \int_{-1}^{1}1dt$ *et que* $\lambda_i > 0$

(b) La première des méthodes est la méthode classique (avec une primitive), avec un polynôme c'est facile : /1

$$\int_{-1}^{1}(x^5-3x^4+x^2-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{6}{5}+\frac{2}{3}-2 = \frac{-38}{15}$$

La seconde méthode consiste à exploiter la quadrature de Gauss, pour un polynôme de degré 5, il suffit de regarde la formule avec une base de $\mathbb{R}_3[X]$. /2

$$\int_{-1}^{1}(x^5-3x^4+x^2-1)\mathrm{d}x = \mathcal{I}(P) = \frac{8}{9}P(0)+\frac{5}{9}(P(-\sqrt{\frac{3}{5}})+P(\sqrt{\frac{3}{5}})) = \frac{8}{9}\times(-1)+\frac{5}{9}(-6\frac{9}{25}+2\frac{3}{5}-2)$$

$$= \frac{-8}{9} + \frac{5\times(-54+30-50)}{9\times 25} = \frac{-40-74}{45} = \frac{-114}{45} = \frac{-38}{15}$$

(c) On exploite la méthode précédente, qui n'est qu'approchée pour des fonctions qui ne sont pas des polynômes de degré inférieur à 5.
Cela commence par le changement de variable $u = 2t-1$.

$$\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\exp(-\frac{u+1}{2})\mathrm{d}u$$

Puis on prend pour approximation de $\mathcal{I}(g)$ avec $g : u \mapsto \frac{1}{2}\exp(-\frac{u+1}{2})$, le nombre 2,5

$$\boxed{\frac{8}{9}g(0)+\frac{5}{9}(g(-\sqrt{\frac{3}{5}})+g(\sqrt{\frac{3}{5}})) = \frac{4}{9}\exp(-\frac{1}{2})+\frac{5}{18}(\exp[\frac{-1}{2}(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1)]+\exp[\frac{-1}{2}(-\sqrt{\frac{3}{5}}-1)])}$$

$$\boxed{\mathcal{I}(g) \approx 0,632120255}$$

(obtenu avec Python)

La valeur théorique est $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{e} \approx 0,632120558$.

Remarques !

Pour calculer une intégrale, on regarde la valeur en ***seulement trois points de*** f *est l'approximation est bonne à une valeur relative de* 10^{-6} *!*