

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Egalité de polynômes

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Egalité de polynômes

Problème Egalité de polynômes et racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Egalité de polynômes

Problème Egalité de polynômes et racines

Problème Expérience et expression polynomiale

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Nombre de racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Nombre de racines

Problème Construction de $\mathbb{K}[X, Y, Z \dots]$

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Problème Nombre de racines

Problème Construction de $\mathbb{K}[X, Y, Z \dots]$

Problème Développement de $\prod_{k=1}^n (X - x_k)$

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Définition - Fonctions polynomiales

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. L'application

$$\begin{aligned}\tilde{P}: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\end{aligned}$$

est appelée *fonction polynomiale associée à P* .

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Définition - Fonctions polynomiales

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. L'application

$$\begin{aligned}\tilde{P}: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\end{aligned}$$

est appelée *fonction polynomiale associée* à P .

Remarque De la fonction polynomiale au polynôme ?

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$$

$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$$

$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

De plus si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\widetilde{P'} = (\widetilde{P})'$.

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$$

$$\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$$

$$\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$$

$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$$

De plus si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\widetilde{P'} = (\widetilde{P})'$.

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\tilde{P}(a) = 0$.

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\tilde{P}(a) = 0$.

Théorème - Racine et division

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$.

Alors a est racine de P si et seulement il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)T$.

Dans ce cas on dit que $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est *racine* de P (ou est un *zéro* de P) si $\tilde{P}(a) = 0$.

Théorème - Racine et division

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$.

Alors a est racine de P si et seulement il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)T$.

Dans ce cas on dit que $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Proposition - Factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, k racines (distinctes) de P .

Alors $\prod_{i=1}^k (X - a_i)$ divise P (i.e. il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = T \times \prod_{i=1}^k (X - a_i).$$

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Proposition - Factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, k racines (distinctes) de P .

Alors $\prod_{i=1}^k (X - a_i)$ divise P (i.e. il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = T \times \prod_{i=1}^k (X - a_i).$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,

ce qui équivaut à :

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n + 1$ racines est nul.

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,

ce qui équivaut à :

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n + 1$ racines est nul.

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,

ce qui équivaut à :

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n + 1$ racines est nul.

Démonstration

Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \tilde{P}(\alpha) = 0$ alors $P = 0$.

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.}\mathbb{Z}_p \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Corollaire - Nombre maximal de racines

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines,

ce qui équivaut à :

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet au moins $n + 1$ racines est nul.

Démonstration

Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \tilde{P}(\alpha) = 0$ alors $P = 0$.

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Attention. Cas de corps non fini...

Ce résultat (ainsi que le suivant) se généralise à $\mathbb{K}$ corps infini
mais pas au cas où $\mathbb{K}$ est fini.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynôme}

$\Rightarrow$ Interpol.

Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui à P associe $\tilde{P}$ est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter $P(\alpha)$ au lieu de $\tilde{P}(\alpha)$.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale

L'application de $\mathbb{K}[X]$ dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui à P associe $\tilde{P}$ est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter $P(\alpha)$ au lieu de $\tilde{P}(\alpha)$.

Ce corollaire permet de clore la question que nous nous étions posées en début de chapitre.

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} \mathbb{Z}_p \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Corollaire - Égalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}
 $\Rightarrow$ Interpol.

Corollaire - Égalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)
 $\Rightarrow$ Interpol.

Corollaire - Égalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

Démonstration

Exercice

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ tels que
 $\tilde{P}(0) = \tilde{Q}(0), \tilde{P}(1) = \tilde{Q}(1), \tilde{P}(2) = \tilde{Q}(2)$. Montrer que $P = Q$.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.

On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} \mathbb{Z}_p \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.

On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par
$$L_i = \frac{\prod_{h \neq i} (X - x_h)}{\prod_{h \neq i} (x_i - x_h)}$$
 vérifient $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Problème d'interpolation

Heuristique. Problématique d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère : $x_1, \dots, x_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

On cherche P de degré minimal tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P(x_i) = y_i$.

On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par
$$L_i = \frac{\prod_{h \neq i} (X - x_h)}{\prod_{h \neq i} (x_i - x_h)}$$
 vérifient $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Attention. Dépendance de L_i

Bien que la notation semble faire croire que les L_i ne dépendent que de i (ou $x_i \dots$). Il n'en est rien.

Chaque L_i dépend bien de x_i mais aussi totalement de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc de chaque x_h .

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

$$\text{C'est } P = \sum_{i=1}^n y_i L_i.$$

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

$$\text{C'est } P = \sum_{i=1}^n y_i L_i.$$

Démonstration

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

$$\text{C'est } P = \sum_{i=1}^n y_i L_i.$$

Démonstration

En prenant $y_i = f(x_i)$, on a le corollaire suivant :

Corollaire - Interpolation aux fonctions

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $x_1, \dots, x_n$ n points distincts de I , alors il existe un unique polynôme P de degré $n - 1$ coïncidant avec f en ces n points (polynôme d'interpolation de Lagrange de f).

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Proposition - Interpolation selon Lagrange (général en degré)

Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^n y_i L_i + T$ où $T \in \mathbb{K}[X]$ admet $x_1, \dots, x_n$ pour racines (entre autres).

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Proposition - Interpolation selon Lagrange (général en degré)

Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(x_i) = y_i$ sont les polynômes de la forme $\sum_{i=1}^n y_i L_i + T$ où $T \in \mathbb{K}[X]$ admet $x_1, \dots, x_n$ pour racines (entre autres).

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor (polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card. } \mathbb{Z}_p \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant. . . Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Taylor

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)
 $\Rightarrow$ Interpol.

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant. . . Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Taylor

Exercice

Soient $n > 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X - a)^3$.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Trouver le polynôme « le plus simple » qui passe... (interpolations)

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. Nombres maximales de racines et degré de P

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

2.1. Fonctions polynomiales

2.2. Racines d'un polynôme

2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

3.1. Problématique

3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est *racine de multiplicité m* (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Par extension, si $P(\alpha) \neq 0$, on dit parfois que α est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P ...).

On note $\mu(\alpha, P)$ l'ordre de multiplicité de α comme racine de P .

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card. } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est *racine de multiplicité m* (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Par extension, si $P(\alpha) \neq 0$, on dit parfois que α est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P ...).

On note $\mu(\alpha, P)$ l'ordre de multiplicité de α comme racine de P .

Savoir-faire. Exploitation d'une racine d'ordre m

α est racine d'ordre m ssi $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$, avec $Q(\alpha) \neq 0$

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

$\Rightarrow$ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

$\Rightarrow$ Interpol.

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

Exercice

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X + 1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ ait au moins une racine multiple (c'est-à-dire de multiplicité ≥ 2) dans $\mathbb{C}$.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- ▶ Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- ▶ Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- ▶ Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- ▶ Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- ▶ $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - a)T = P$

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- ▶ Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- ▶ Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- ▶ $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - a)T = P$
- ▶ Plusieurs racines, plusieurs facteurs !

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

- ▶ Surjection canonique : $P \mapsto (x \mapsto P(x))$.
- ▶ Réciproque est vraie : si p et q deux fonctions polynomiales égales (sur $\mathbb{R}$) alors $P = Q$
- ▶ $P(a) = 0$, a est racine de $P \iff \exists T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - a)T = P$
- ▶ Plusieurs racines, plusieurs facteurs !
- ▶ Jamais plus de $n = \deg P$ racines !

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

► Problème : P tel que $\forall i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card} Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^n b_i L_i$

$$\text{où} \quad L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Conclusion

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

- Problème : P tel que $\forall i \in \mathbb{N}_n, P(a_i) = b_i$?
- Une unique solution de degré minimal $P = \sum_{i=1}^n b_i L_i$

$$\text{où } L_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

- De multiples solutions sur $\mathbb{K}[X]$.

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale}

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card } Z_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine

Objectifs

⇒ Passage de P à $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$. Réciproque ? Lien avec les racines

⇒ Interpolation

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 30 : Fonctions polynomiales et racines
- 4. Formules de Taylor
- 5. Relations coefficients racines
- ▶ Exercice n° 608 & 615

⇒ De $\mathbb{K}[X]$ à
 $\{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K},$
polynomiale)

⇒ Interpol.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

- 2.1. Fonctions polynomiales
- 2.2. Racines d'un polynôme
- 2.3. $\text{Card.Z}_P \leq \deg P$

3. Interpolation de
Lagrange

- 3.1. Problématique
- 3.2. Interpolation (de Lagrange)

4. Racines multiples
et formule de Taylor

- 4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)
- 4.2. Multiplicité d'une racine