



⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Leçon 71 - Fonctions polynomiales et racines

12 février 2026

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Théorème - Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P = n$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant. . . Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Taylor

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Savoir-faire. Division euclidienne et formule de Taylor

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présenté au chapitre suivant. . . Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Taylor

Exercice

Soient $n > 2$ et $a \in \mathbb{C}$. Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de $X^n + 1$ par $(X - a)^3$.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est *racine de multiplicité m* (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Par extension, si $P(\alpha) \neq 0$, on dit parfois que α est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P ...).

On note $\mu(\alpha, P)$ l'ordre de multiplicité de α comme racine de P .

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Définition

Définition - Racine de multiplicité m

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est *racine de multiplicité m* (ou d'ordre (de multiplicité) m) de P si $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Par extension, si $P(\alpha) \neq 0$, on dit parfois que α est une racine de multiplicité 0 de P (c'est-à-dire n'est PAS racine de P ...).

On note $\mu(\alpha, P)$ l'ordre de multiplicité de α comme racine de P .

Savoir-faire. Exploitation d'une racine d'ordre m

α est racine d'ordre m ssi $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$, avec $Q(\alpha) \neq 0$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Théorème - Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Alors a est racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

Exercice

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(X + 1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$ ait au moins une racine multiple (c'est-à-dire de multiplicité ≥ 2) dans $\mathbb{C}$.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Savoir-faire. Corps algébriquement clos

Un corps dont tous les polynômes sont nécessairement scindés est appelé un corps algébriquement clos.

Nous en reparlerons lorsque nous aurons vu le théorème fondamental de l'algèbre

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Définition - Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=0}^n (X - x_i)$$

où les x_i sont les racines de P dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et a_n est le coefficient dominant de P .

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Définition - Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=0}^n (X - x_i)$$

où les x_i sont les racines de P dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et a_n est le coefficient dominant de P .

Remarque Corps $\mathbb{K}$

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Définition - Fonctions symétriques élémentaires

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $\deg P = n$.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines comptées avec leur multiplicité.

On définit les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de $n \dots$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de $n \dots$

Analyse - Relation de récurrence

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Ecrire ces sommes

Savoir-faire. Ecrire ces sommes (de Newton)

σ_k correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement k éléments de $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et en multipliant les nombres x_i indexés par ces k éléments (pris une fois) :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas, σ_k dépend aussi de $n \dots$

Analyse - Relation de récurrence

Exercice

Ecrire σ_3 et σ_4 pour $n = 5$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_n)$, on a donc

$$P_n = (X - x_n)P_{n-1}.$$

Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$

Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \frac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_n)$, on a donc

$$P_n = (X - x_n)P_{n-1}.$$

Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$

Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \frac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Théorème - Relations coefficients-racines

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (**écrites avec leur multiplicité**) du polynôme scindé P :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Heuristique. Relation coefficients-racines (par récurrence)

Notons $P_n = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_n)$, on a donc

$$P_n = (X - x_n)P_{n-1}.$$

Et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n[P_{n-1}]_k$

Cette relation ressemble beaucoup aux calculs vus plus haut. On montre par récurrence $\sigma_k^n = (-1)^k \frac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$

Théorème - Relations coefficients-racines

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (**écrites avec leur multiplicité**) du polynôme scindé P :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Démonstration

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Heuristique - Fonctions symétriques générales

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.

on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des σ_k .

en particulier $S_k = x_1^k + \cdots x_n^k$ s'exprime à l'aide des coefficients.

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Heuristique - Fonctions symétriques générales

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.

on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des σ_k .

en particulier $S_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ s'exprime à l'aide des coefficients.

Exercice

Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} a + b + c &= 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 1 \end{cases}$$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P ,

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P ,
2. Connaissant le degré de P , on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché.

Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P ,
2. Connaissant le degré de P , on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché.
Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$

3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes $A, B, C, \dots$

On peut prendre des valeurs particulières pour $x_1, x_2, \dots$
Par exemple (...)

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

Bonne combinaison ?

Savoir-faire. Comment trouver la bonne combinaison en σ_i ?

Voici une méthode. Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit P un tel polynôme (par exemple $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$).

1. Il faut d'abord trouver le degré de P ,
2. Connaissant le degré de P , on considère des facteurs à identifier devant le produit des σ_i de degré recherché.
Donc sur notre exemple : $P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$
3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes $A, B, C, \dots$

On peut prendre des valeurs particulières pour $x_1, x_2, \dots$

Par exemple (...)

$$\text{Donc } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3$$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Exercice

On note x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - X^2 + 4X + 1$.

Calculer $S = \sum_{i \neq j} x_i^3 x_j$.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Le théorème suivant est admis :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Le théorème suivant est admis :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

- Interpolation de dérivation
- Formule de Taylor : pour tout P et tout $a \in \mathbb{K}$:

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

- a est racine d'ordre m de P
 - ssi $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$
 - ssi $\forall i < m, P^{(i)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i}$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i}$
- Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- ▶ P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i}$
- ▶ Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- ▶ Plus généralement, si $T(x_1, \dots, x_n)$ est symétrique en les racines de P , alors T s'exprime avec les coefficients de P

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- ▶ P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i}$
- ▶ Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- ▶ Plus généralement, si $T(x_1, \dots, x_n)$ est symétrique en les racines de P , alors T s'exprime avec les coefficients de P
- ▶ Savoir-faire : comment trouver la relation qui lie Σ_k et $(\sigma_h)_h$.

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples
- ⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

- ▶ P est scindé si P s'écrit de la forme $\prod_{i=1}^k (X - x_i)^{n_i}$
- ▶ Si P est scindé, alors $\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} a_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_n}$
- ▶ Plus généralement, si $T(x_1, \dots, x_n)$ est symétrique en les racines de P , alors T s'exprime avec les coefficients de P
- ▶ Savoir-faire : comment trouver la relation qui lie Σ_k et $(\sigma_h)_h$.
- ▶ Théorème fondamental de l'algèbre.

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

1. Problèmes

2. Fonctions polynomiales et racines

3. Interpolation de Lagrange

4. Racines multiples et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor (polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème fondamental de l'algèbre

⇒ Taylor

⇒ Faire le lien entre
les coefficients de P
et ses racines

Objectifs

⇒ Polynôme de Taylor et racines multiples

⇒ Faire le lien entre les coefficients de P et ses racines

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 30 : Anneau euclidien des polynômes.
- ▶ Exercice n° 618, 619, 620 & 621

1. Problèmes

2. Fonctions
polynomiales et
racines

3. Interpolation de
Lagrange

4. Racines multiples
et formule de Taylor

4.1. Formules de Taylor
(polynomiale)

4.2. Multiplicité d'une racine

5. Relations
coefficients-racines

5.1. Polynôme scindé

5.2. Fonctions symétriques
élémentaires

5.3. Applications

6. Théorème
fondamental de
l'algèbre