

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

4. PPCM

5.1. Décomposition unique en produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$



Leçon 74 - L'anneau euclidien des polynômes

⇒ Décomposition en produits d'irréductibles

⇒ Idées plus générales

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2. D.E.

3. Plus Grand Commun Diviseur

3. PGCD

4. Plus Petit Commun Multiple

4. PPCM

5. Polynômes irréductibles

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en produit d'irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Décomposition en produits d'irréductibles

⇒ Idées plus générales

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2. D.E.

3. Plus Grand Commun Diviseur

3. PGCD

4. Plus Petit Commun Multiple

4. PPCM

5. Polynômes irréductibles

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en produit d'irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Des polynômes « premiers »

Les polynômes irréductibles jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Des polynômes « premiers »

Les polynômes irréductibles jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Définition - Polynômes irréductibles

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si

$$(P = AB, A, B \in \mathbb{K}[X]) \Rightarrow \deg A = 0 \text{ ou } \deg B = 0$$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Des polynômes « premiers »

Les polynômes irréductibles jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Définition - Polynômes irréductibles

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si

$$(P = AB, A, B \in \mathbb{K}[X]) \Rightarrow \deg A = 0 \text{ ou } \deg B = 0$$

Proposition - Polynôme (de degré 1) irréductible

Quel que soit le corps $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, le polynôme $X - \alpha$ est irréductible sur $\mathbb{K}$.

$\Rightarrow$ Irréductibles
 $\Rightarrow$ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Des polynômes « premiers »

Les polynômes irréductibles jouent ici le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Définition - Polynômes irréductibles

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si

$$(P = AB, A, B \in \mathbb{K}[X]) \Rightarrow \deg A = 0 \text{ ou } \deg B = 0$$

Proposition - Polynôme (de degré 1) irréductible

Quel que soit le corps $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, le polynôme $X - \alpha$ est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Démonstration

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Polynômes irréductibles et polynômes premiers entre eux

Un polynôme irréductible est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas.

Un polynôme irréductible divise un produit si et seulement si il divise l'un des facteurs.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Polynômes irréductibles et polynômes premiers entre eux

Un polynôme irréductible est premier avec tous les polynômes qu'il ne divise pas.

Un polynôme irréductible divise un produit si et seulement si il divise l'un des facteurs.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Théorème - Décomposition en produit de facteurs polynomiaux irréductibles

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un scalaire (élément de $\mathbb{K}$) par un produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Théorème - Décomposition en produit de facteurs polynomiaux irréductibles

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un scalaire (élément de $\mathbb{K}$) par un produit de polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$.

Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Critère de divisibilité par polynômes irréductibles

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Si

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \text{ et } B = \mu P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k}$$

où les P_i sont irréductibles unitaires distincts deux à deux,
 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ (éventuellement nuls), alors

$$A|B \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i \leq \beta_i$$

$$A \wedge B = \prod_{i=1}^k P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$A \vee B = \prod_{i=1}^k P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Critère de divisibilité par polynômes irréductibles

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Si

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k} \text{ et } B = \mu P_1^{\beta_1} P_2^{\beta_2} \dots P_k^{\beta_k}$$

où les P_i sont irréductibles unitaires distincts deux à deux,
 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ (éventuellement nuls), alors

$$A|B \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i \leq \beta_i$$

$$A \wedge B = \prod_{i=1}^k P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$A \vee B = \prod_{i=1}^k P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Décomposition en produits d'irréductibles

⇒ Idées plus générales

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2. D.E.

3. Plus Grand Commun Diviseur

3. PGCD

4. Plus Petit Commun Multiple

4. PPCM

5. Polynômes irréductibles

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en produit d'irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Rappel :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Rappel :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire - Décomposition dans $\mathbb{C}$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Rappel :

Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire - Décomposition dans $\mathbb{C}$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{C}$ algébriquement clos

Théorème - $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Tout polynôme non nul P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose de manière unique (à une permutation près) sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - x_i)^{m_i}$$

où les $x_i \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\sum_{i=1}^p m_i = \deg P$.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{C}$ algébriquement clos

Théorème - $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Tout polynôme non nul P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose de manière unique (à une permutation près) sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - x_i)^{m_i}$$

où les $x_i \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\sum_{i=1}^p m_i = \deg P$.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{C}$ algébriquement clos

Théorème - $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Tout polynôme non nul P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose de manière unique (à une permutation près) sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - x_i)^{m_i}$$

où les $x_i \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\sum_{i=1}^p m_i = \deg P$.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est donc scindé sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

Savoir-faire. Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Sur $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont de degré 1.
Donc décomposer un polynôme P sur $\mathbb{C}[X]$ en produit d'irréductibles est équivalent à chercher toutes les racines de P en tenant compte de leur multiplicité.

En règle générale, on choisit des facteurs unitaires, et on multiplie par λ , le coefficient dominant de P .

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

En appliquant le critère de divisibilité par des irréductibles :

Corollaire - Critère de divisibilité dans $\mathbb{C}$

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors $P|Q$ dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si les racines de P sont des racines de Q avec une multiplicité inférieure dans P .

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

En appliquant le critère de divisibilité par des irréductibles :

Corollaire - Critère de divisibilité dans $\mathbb{C}$

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors $P|Q$ dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si les racines de P sont des racines de Q avec une multiplicité inférieure dans P .

Exercice

Démontrer à nouveau que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

On commencera par faire l'étude dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{K}$.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Décomposition en produits d'irréductibles

⇒ Idées plus générales

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2. D.E.

3. Plus Grand Commun Diviseur

3. PGCD

4. Plus Petit Commun Multiple

4. PPCM

5. Polynômes irréductibles

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en produit d'irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, on sait qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$ admet dans $\mathbb{C}$ $\deg P$ racines comptées avec leur multiplicité.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, on sait qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$ admet dans $\mathbb{C}$ $\deg P$ racines comptées avec leur multiplicité.

Proposition - Conjugaison des racines

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine de multiplicité m de $P \in \mathbb{R}[X]$,
alors il en est de même de $\overline{z_0}$.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, on sait qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$ admet dans $\mathbb{C}$ $\deg P$ racines comptées avec leur multiplicité.

Proposition - Conjugaison des racines

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine de multiplicité m de $P \in \mathbb{R}[X]$,
alors il en est de même de $\overline{z_0}$.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Si $\deg P$ est impair

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P$ soit impair. Alors P a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Si $\deg P$ est impair

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P$ soit impair. Alors P a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Si $\deg P$ est impair

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P$ soit impair. Alors P a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Proposition - Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont

- ▶ les polynômes de degré 1,
- ▶ les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Proposition - Si $\deg P$ est impair

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P$ soit impair. Alors P a au moins une racine dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Proposition - Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont

- ▶ les polynômes de degré 1,
- ▶ les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Théorème - Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de manière unique (à une permutation près) sous la forme

$$P = \lambda \prod_i (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_j (X^2 + b_j X + c_j)^{p_j}$$

où les α_i, b_j, c_j sont des réels, m_i, p_j des entiers tels que

$$\sum_i m_i + 2 \sum_j p_j = \deg P, \quad \text{et} \quad b_j^2 - 4c_j < 0.$$

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Théorème - Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de manière unique (à une permutation près) sous la forme

$$P = \lambda \prod_i (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_j (X^2 + b_j X + c_j)^{p_j}$$

où les α_i, b_j, c_j sont des réels, m_i, p_j des entiers tels que

$$\sum_i m_i + 2 \sum_j p_j = \deg P, \quad \text{et} \quad b_j^2 - 4c_j < 0.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Savoir-faire. Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

On décompose P sur $\mathbb{C}[X]$.

Si α est racine d'ordre m , alors $\bar{\alpha}$ également.

Le polynôme $(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m$ divise P et est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Savoir-faire. Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

On décompose P sur $\mathbb{C}[X]$.

Si α est racine d'ordre m , alors $\bar{\alpha}$ également.

Le polynôme $(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m$ divise P et est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Décomposer $2X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Savoir-faire. Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

On décompose P sur $\mathbb{C}[X]$.

Si α est racine d'ordre m , alors $\bar{\alpha}$ également.

Le polynôme $(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m$ divise P et est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Décomposer $2X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 1$.

Que vaut le produit des racines $2n$ -ièmes de l'unité ?

$\Rightarrow$ Irréductibles

$\Rightarrow$ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Savoir-faire. Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

On décompose P sur $\mathbb{C}[X]$.

Si α est racine d'ordre m , alors $\bar{\alpha}$ également.

Le polynôme $(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m$ divise P et est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Décomposer $2X^4 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice

Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 1$.

Que vaut le produit des racines $2n$ -ièmes de l'unité ?

Exercice

Soient $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les racines n -ièmes de l'unité. Montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 - 2z_k \cos \theta + 1) = 4 \sin^2 \frac{n\theta}{2}$$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

⇒ Quelques idées plus générales

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.
- ▶ Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers :

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.
- ▶ Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers :
 - ▶ Unique décomposition en produit de facteurs irréductibles.

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.
- ▶ Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers :
 - ▶ Unique décomposition en produit de facteurs irréductibles.
 - ▶ Critères de divisibilité, PGCD, PPCM

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.
- ▶ Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers :
 - ▶ Unique décomposition en produit de facteurs irréductibles.
 - ▶ Critères de divisibilité, PGCD, PPCM
- ▶ Dans $\mathbb{C}[X]$ les irréductibles sont les $(X - \alpha) \dots$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

- ▶ P est irréductible si $AB = P \implies A$ ou B est inversible.
- ▶ Les polynômes irréductibles jouent le même rôle que les nombres premiers :
 - ▶ Unique décomposition en produit de facteurs irréductibles.
 - ▶ Critères de divisibilité, PGCD, PPCM
- ▶ Dans $\mathbb{C}[X]$ les irréductibles sont les $(X - a) \dots$
- ▶ Dans $\mathbb{R}[X]$ les irréductibles sont les $(X - a)$ ou $X^2 + aX + b$ avec $a^2 - 4b < 0$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

⇒ Quelques idées plus générales

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

⇒ Quelques idées plus générales

- ▶ On peut définir les congruences modulo un polynôme

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

⇒ Quelques idées plus générales

- ▶ On peut définir les congruences modulo un polynôme
- ▶ Si A est un anneau euclidien (=muni d'une division euclidienne),
Alors A est principal (tout idéal est principal)

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Objectifs

⇒ Polynômes irréductibles

⇒ Quelques idées plus générales

- ▶ On peut définir les congruences modulo un polynôme
- ▶ Si A est un anneau euclidien (=muni d'une division euclidienne), Alors A est principal (tout idéal est principal)
- ▶ Dans ce cas, on définit $d = (a \wedge b)$ si $dA = aA + bA \dots$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

⇒ Irréductibles

⇒ Généralisations

Objectifs

- ⇒ Polynômes irréductibles
- ⇒ Quelques idées plus générales

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours :
chapitre 26 : Fractions rationnelles
- ▶ Exercices n° 694 & 696

1. Problèmes

2. D.E.

3. PGCD

4. PPCM

5. Polynômes
irréductibles

5.1. Décomposition unique en
produit d'irréductibles

5.2. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

5.3. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$