



Leçon 75 - Corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

Leçon 75 - Corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Problèmes

Problème

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \rightarrow ???$

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Problème

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \rightarrow ???$

Problème

Intégration de fraction

Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Problème

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \rightarrow ???$

Problème

Intégration de fraction

Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx$

Problème

Paramétrage rationnel de cercle

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Heuristique. Ensemble quotient

On crée l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ à l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}$ était un anneau intègre mais pas un corps, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$. De même on va créer un corps contenant $\mathbb{K}[X]$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Heuristique. Ensemble quotient

On crée l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ à l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}$ était un anneau intègre mais pas un corps, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$. De même on va créer un corps contenant $\mathbb{K}[X]$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Définition - Fractions rationnelles (par classe d'équivalence)

La relation binaire définie sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ par

$$(A_1, B_1) \mathcal{R} (A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1$$

est une relation d'équivalence.

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence, un élément F de $\mathbb{K}(X)$ est écrit sous la forme $F = \frac{A}{B}$ (ou $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$) où $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

On a donc $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1$

F s'appelle une fraction rationnelle.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Corps des fractions rationnelles

Muni des lois internes $+$ et $\times$ définies par

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1B_2 + B_1A_2}{B_1B_2}, \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps contenant $\mathbb{K}[X]$ (on identifie B à $\frac{B}{1}$).

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Corps des fractions rationnelles

Muni des lois internes $+$ et $\times$ définies par

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 B_2 + B_1 A_2}{B_1 B_2}, \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps contenant $\mathbb{K}[X]$ (on identifie B à $\frac{B}{1}$).

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Composition

Soit $F_1 = \frac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \frac{A_2}{B_2}$ deux fractions rationnelles.
Alors $F_1 \circ F_2$ est également une fraction rationnelle.

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Composition

Soit $F_1 = \frac{A_1}{B_1}$ et $F_2 = \frac{A_2}{B_2}$ deux fractions rationnelles.
Alors $F_1 \circ F_2$ est également une fraction rationnelle.

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Choix d'un (meilleur ?) représentant

Définition - Représentant irréductible

Soit $F = \frac{A}{B}$ et $D = A \wedge B$. On a donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec
 $P \wedge Q = 1$, et alors $F = \frac{P}{Q}$.

On dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F .

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Choix d'un (meilleur ?) représentant

Définition - Représentant irréductible

Soit $F = \frac{A}{B}$ et $D = A \wedge B$. On a donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec $P \wedge Q = 1$, et alors $F = \frac{P}{Q}$.

On dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F .

Définition - Degré

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. L'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\deg A - \deg B$, est indépendant du choix du représentant $\frac{A}{B}$ de F . On l'appelle degré de la fraction rationnelle F , noté $\deg F$.

Il faut démontrer l'indépendance par représentant.

Démonstration

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Extension des propriétés sur les degrés

On a les propriétés suivantes :

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$$

$$\deg F_1 F_2 = \deg F_1 + \deg F_2$$

$$\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Degré d'une fraction

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

Proposition - Extension des propriétés sur les degrés

On a les propriétés suivantes :

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$$

$$\deg F_1 F_2 = \deg F_1 + \deg F_2$$

$$\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0$$

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . Soit $a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).

La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . Soit $a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).

La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Remarque a pôle et racine de F ?

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . Soit $a \in \mathbb{K}$.

On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).

La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Remarque a pôle et racine de F ?

Exemple Racine et pôles de $\frac{X^3 + X^2 + X - 3}{X^2 - X}$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . On note Δ_F l'ensemble des pôles de F et on définit alors la fonction rationnelle associée à F par

$$\begin{aligned}\tilde{F}: \mathbb{K} \setminus \Delta_F &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}\end{aligned}$$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Fonction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . On note Δ_F l'ensemble des pôles de F et on définit alors la fonction rationnelle associée à F par

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbb{K} \setminus \Delta_F &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \end{aligned}$$

Remarque Egalité des fonctions

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\frac{A}{B}$ de F . On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F , notée F' .

Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\frac{A}{B}$ de F . On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F , notée F' .

Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Il faut démontrer l'indépendance du résultat en rapport au représentant.

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Définition - Dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\frac{A}{B}$ de F . On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F , notée F' .

Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Il faut démontrer l'indépendance du résultat en rapport au représentant.

Démonstration

Remarque Dérivation et fonction rationnelle

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Proposition - partie entière

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \hat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \hat{F} \text{ et } \deg \hat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F .

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Proposition - partie entière

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \hat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \hat{F} \text{ et } \deg \hat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F .

Démonstration

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Proposition - partie entière

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$. Alors il existe un unique couple $(E, \hat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + \hat{F} \text{ et } \deg \hat{F} < 0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F .

Démonstration

Savoir-faire. Comment obtenir la partie entière ?

Si $\deg F < 0$ alors $E = 0$, sinon on effectue la division euclidienne de P par Q : $P = EQ + R$ et $F = E + \frac{R}{Q}$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles

$$Q = \lambda Q_1^{k_1} \dots Q_p^{k_p} = \lambda \prod_{j=1}^p Q_j^{k_j}.$$

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^p \left(\frac{P_{1j}}{Q_j} + \frac{P_{2j}}{Q_j^2} + \dots + \frac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$$

où $P_{ij} \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P_{ij} < \deg Q_j$.

Cette décomposition s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{K}$ (ou dans $\mathbb{K}(X)$) de la fraction F .

Si $Q_j = X - a_j$, $a_j \in \mathbb{K}$, $\left(\frac{P_{1j}}{Q_j} + \frac{P_{2j}}{Q_j^2} + \dots + \frac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$ s'appelle la

partie polaire de F relative (ou associée) au polynôme Q_j (ou au pôle a_j si $Q_j = X - a_j$).

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Grosse démonstration

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

Heuristique. Principe de démonstration

On exploite une formule de Bézout généralisée pour démontrer l'existence (par récurrence sur p).

Puis avec la décomposition en base Q_i (qui correspond à la formule de Taylor si $Q_i = X - a_i$).

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

$\Rightarrow$ DES

Heuristique. Principe de démonstration

On exploite une formule de Bézout généralisée pour démontrer l'existence (par récurrence sur p).

Puis avec la décomposition en base Q_i (qui correspond à la formule de Taylor si $Q_i = X - a_i$).

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Cas des pôles simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \frac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \frac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Ce second résultat (avec Q' , facile à obtenir car polynôme) évite même la factorisation de Q .

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Proposition - Pôles simples

Si a est un pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, $\deg F < 0$, pour trouver la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \frac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Ce second résultat (avec Q' , facile à obtenir car polynôme) évite même la factorisation de Q .

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Savoir-faire (au pluriel !)

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas pôle simple

Si a est pôle simple de $F = \frac{P}{Q}$, la partie polaire $\frac{\lambda}{X-a}$ s'obtient :

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Savoir-faire (au pluriel !)

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas d'un pôle multiple

En isolant la partie polaire de a de multiplicité m , pour

$$Q = (X - a)^m \widehat{Q},$$

$$F = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{(X - a)^k} + \frac{P_1}{\widehat{Q}}.$$

- En multipliant par $(X - a)^m$ et en substituant a à X on trouve λ_m .
- On retranche ensuite $\frac{\lambda_m}{(X - a)^m}$ à F , on obtient donc après simplification une fraction dont a est pôle de multiplicité $m - 1$ et on recommence. Cette méthode est en pratique applicable si m est petit.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Savoir-faire (au pluriel !)

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Savoir-faire. Obtenir la partie polaire - cas d'un pôle multiple

D'autres possibilités une fois λ_m obtenu :

- On multiplie par X puis on prend la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle obtenue : cela permet généralement d'obtenir λ_1 .
- Si $m \geq 3$, on a donc obtenu λ_m et λ_1 . Si l'on veut éviter les soustractions successives, on substitue des valeurs particulières simples à X autres que le pôle $(0, \dots)$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Exercice d'application

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction $F = \frac{1}{X^2(X-1)^3}$.

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

- 3.3. Sur $\mathbb{C}$

- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Cas $\mathbb{K}$ algébriquement clos

Leçon 75 - Corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

Sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Cas $\mathbb{K}$ algébriquement clos

Sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en

produit de polynômes irréductibles $Q = \lambda \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{k_j}$.

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière et $A_{ij} \in \mathbb{C}$,

$$F = E + \sum_{j=1}^p \left(\frac{A_{1j}}{X - \alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X - \alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k_j j}}{(X - \alpha_j)^{k_j}} \right)$$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

$$\text{Si } P = \lambda \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{k_j} \text{ alors } \frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^p \frac{k_j}{X - \alpha_j}.$$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$**
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

$$\text{Si } P = \lambda \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{k_j} \text{ alors } \frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^p \frac{k_j}{X - \alpha_j}.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$**
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

$$\text{Si } P = \lambda \prod_{j=1}^p (X - \alpha_j)^{k_j} \text{ alors } \frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^p \frac{k_j}{X - \alpha_j}.$$

Démonstration

Exercice

Donner la décomposition de $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}[X]$

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Irréductibles de degré 1 ou 2

Sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Irréductibles de degré 1 ou 2

Sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible,

$$Q = \lambda \prod_{j=1}^{p'} (X - \alpha_j)^{k'_j} \prod_{j=1}^{p''} (X^2 + \delta_j X + \gamma_j)^{k''_j}.$$

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p'} \left(\frac{A_{1j}}{X - \alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X - \alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k'_j j}}{(X - \alpha_j)^{k'_j}} \right) + \sum_{j=1}^{p''} \left(\frac{B_{1j}X + C_{1j}}{X^2 + \delta_j X + \gamma_j} + \cdots + \frac{B_{k''_j j}X + C_{k''_j j}}{(X^2 + \delta_j X + \gamma_j)^{k''_j}} \right),$$

tous les coefficients A, B, C étant des réels.

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

- 2.1. Construction
- 2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle
- 2.3. Fonction rationnelle
- 2.4. Dérivation

3. D.E.S.

- 3.1. Partie entière
- 3.2. Sur $\mathbb{K}$
- 3.3. Sur $\mathbb{C}$
- 3.4. Sur $\mathbb{R}$

Savoir-faire. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

On peut

- ▶ décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les pôles conjugués : cela marche bien quand la multiplicité est 1 ;
- ▶ procéder par identification ;
- ▶ quand il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer, on utilise des valeurs particulières : $0, 1, -1, +\infty, -\infty$;
- ▶ utiliser une éventuelle parité et l'unicité de la décomposition.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Savoir-faire. Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

On peut

- ▶ décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les pôles conjugués : cela marche bien quand la multiplicité est 1 ;
- ▶ procéder par identification ;
- ▶ quand il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer, on utilise des valeurs particulières : $0, 1, -1, +\infty, -\infty$;
- ▶ utiliser une éventuelle parité et l'unicité de la décomposition.

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^2}$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- ▶ Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- ▶ Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- ▶ C'est un corps ! (tout élément est inversible)

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- ▶ Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- ▶ C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- ▶ Élément représentatif : fraction irréductible.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- ▶ Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- ▶ C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- ▶ Élément représentatif : fraction irréductible.
- ▶ Extension : degré, valuation, racines, pôles, dérivée

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

- ▶ Classe d'équivalence de $\frac{A}{B}$.
- ▶ C'est un corps ! (tout élément est inversible)
- ▶ Élément représentatif : fraction irréductible.
- ▶ Extension : degré, valuation, racines, pôles, dérivée
- ▶ Fonctions rationnelles

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

► Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- ▶ Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- ▶ Principe de décomposition en éléments simples.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- ▶ Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- ▶ Principe de décomposition en éléments simples.
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- ▶ Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- ▶ Principe de décomposition en éléments simples.
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- ▶ Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- ▶ Principe de décomposition en éléments simples.
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$
- ▶ De nombreux savoir-faire.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

- ▶ Obtenir la partie entière (quotient de la div. euclidienne).
- ▶ Principe de décomposition en éléments simples.
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$
- ▶ Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où les irréductibles sont les $(X - \alpha)$ ou $X^2 - aX + b$, avec $a^2 - 4b < 0$
- ▶ De nombreux savoir-faire.

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$

Conclusion

⇒ Constr. de $\mathbb{K}(X)$

⇒ DES

Objectifs

⇒ Construction de $\mathbb{K}(X)$

⇒ Principe de la décomposition en éléments simples

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours :
Chapitre 25 : Espace de dimension finie
- ▶ Exercices : N° 650 & 652

1. Problèmes

2. $\mathbb{K}(X)$

2.1. Construction

2.2. Représentant irréductible.
Degré et pôle

2.3. Fonction rationnelle

2.4. Dérivation

3. D.E.S.

3.1. Partie entière

3.2. Sur $\mathbb{K}$

3.3. Sur $\mathbb{C}$

3.4. Sur $\mathbb{R}$