



Leçon 53 - Espaces vectoriels

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Leçon 53 - Espaces vectoriels

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Problème Structure de la géométrie vectorielle

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Problème Structure de la géométrie vectorielle

Problème Sous-espaces vectoriels

$F \cap G, F \cup G ?$

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Problème Structure de la géométrie vectorielle

Problème Sous-espaces vectoriels

$F \cap G, F \cup G ?$

Problème Anneau des sous-espaces vectoriels

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Problème Applications qui conservent la structure

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Problème Applications qui conservent la structure

Problème Projection

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Loi de composition externe

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Définition - Loi de composition externe

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **loi de composition externe sur E** à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E (on la note généralement par un point) :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x\end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Définition - Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** (notation $\mathbb{K}$ -e.v.) ou **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** tout triplet $(E, +, \cdot)$ formé d'un ensemble E , d'une loi interne $+$ sur E et d'une loi externe $\cdot$ sur E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- Et on a les quatre propriétés suivantes :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \qquad (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$$

$$\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) \qquad 1 \cdot x = x.$$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.

Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

L'élément neutre de $(E, +)$ s'appelle le vecteur nul, noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Définition - Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** (notation $\mathbb{K}$ -e.v.) ou **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** tout triplet $(E, +, \cdot)$ formé d'un ensemble E , d'une loi interne $+$ sur E et d'une loi externe $\cdot$ sur E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif
- Et on a les quatre propriétés suivantes :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \qquad (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$$

$$\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) \qquad 1 \cdot x = x.$$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.

Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.

L'élément neutre de $(E, +)$ s'appelle le vecteur nul, noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

Remarque Corps $\mathbb{K}$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Propriété - Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$0 \cdot x = 0_E$$

$$(-1) \cdot x = -x$$

$$\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$$

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Propriété - Premières propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$0 \cdot x = 0_E$$

$$(-1) \cdot x = -x$$

$$\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$$

$$\lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$\lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espace vectoriel des polynômes

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Proposition - Espace vectoriel des matrices

$(\mathcal{M}_{n,p}(K), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espace vectoriel des polynômes

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Démonstration

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_{E_1} y_1, x_2 +_{E_2} y_2, \dots, x_n +_{E_n} y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot_{E_1} x_1, \dots, \lambda \cdot_{E_n} x_n)$$

Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v., de vecteur nul $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_{E_1} y_1, x_2 +_{E_2} y_2, \dots, x_n +_{E_n} y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot_{E_1} x_1, \dots, \lambda \cdot_{E_n} x_n)$$

Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v., de vecteur nul $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Remarque Application classique

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Espaces produits

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 +_{E_1} y_1, x_2 +_{E_2} y_2, \dots, x_n +_{E_n} y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot_{E_1} x_1, \dots, \lambda \cdot_{E_n} x_n)$$

Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v., de vecteur nul $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Remarque Application classique

Exercice

A démontrer

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à
domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$ -e.v. on en déduit que

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$ -e.v. on en déduit que

Corollaire - Exemple crucial !

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -e.v de vecteur nul $(0, \dots, 0)$: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$ -e.v.

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à
domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$ -e.v. on en déduit que

Corollaire - Exemple crucial !

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -e.v de vecteur nul $(0, \dots, 0)$: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. et $\mathbb{C}^n$
est un $\mathbb{C}$ -e.v.

Exercice

Montrer que $\mathbb{C}^n$ est également un $\mathbb{R}$ -e.v.

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Famille presque nulle

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).

On dit qu'une famille $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.

On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.

Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Famille presque nulle

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).

On dit qu'une famille $(y_i)_{i \in E}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.

On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.

Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exercice

On a $(y_i) + (z_i) = (y_i + z_i)$. Démontrer la proposition précédente.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Famille presque nulle

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Définition - Famille presque nulle

On considère un ensemble E (par exemple un corps $\mathbb{K}$).

On dit qu'une famille $(y_i)_{i \in E}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.

On note alors $E^{(I)}$, cet ensemble.

Alors $(E^{(I)}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Exercice

On a $(y_i) + (z_i) = (y_i + z_i)$. Démontrer la proposition précédente.

Exemple $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathcal{F}(X, E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{array}{ll} f + g : X \rightarrow E & \lambda \cdot f : X \rightarrow E \\ x \mapsto f(x) +_E g(x) & x \mapsto \lambda \cdot f(x) \end{array} \quad \text{et}$$

Alors : $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. (pour E $\mathbb{K}$ -e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathcal{F}(X, E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{aligned} f + g : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto f(x) +_E g(x) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot f : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \lambda \cdot_E f(x) \end{aligned}$$

Alors : $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. (pour E $\mathbb{K}$ -e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathcal{F}(X, E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{aligned} f + g : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto f(x) +_E g(x) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot f : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \lambda \cdot_E f(x) \end{aligned}$$

Alors : $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. (pour E $\mathbb{K}$ -e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Analyse Cas particuliers

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Cas plus généraux

Proposition - Espaces de fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathcal{F}(X, E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\begin{aligned} f + g : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto f(x) +_E g(x) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \lambda \cdot f : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \lambda \cdot_E f(x) \end{aligned}$$

Alors : $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v. (pour E $\mathbb{K}$ -e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Analyse Cas particuliers

Corollaire - Exemples multiples

$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$$

Proposition - Stabilité linéaire

Si x et y sont combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Combinaison linéaire

On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$$

Proposition - Stabilité linéaire

Si x et y sont combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Démonstration

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Définition - Généralisation : combinaison linéaire de famille

Soit I un ensemble infini et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .
On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i \in I}$ s'il est combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'éléments de cette famille.

Ce qui peut aussi s'écrire : il existe une famille presque nulle (ou à support compact) $(\lambda_i)_{i \in I}$ (c'est-à-dire comportant seulement un nombre fini de λ_i non nuls) telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$.

Ou encore, il existe $J \subset I$, fini, et $(\lambda_i)_{i \in J}$ tel que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Sous-espace vectoriel

Soit F une partie non vide de E .

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E

si F est stable pour les deux lois $+$ et $\cdot$

et si F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$ -e.v.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Sous-espace vectoriel

Soit F une partie non vide de E .

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E

si F est stable pour les deux lois $+$ et $\cdot$

et si F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$ -e.v.

Exemple Triviaux

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$

$$(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$

$$(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Caractérisation

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$

$$(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Démonstration

Remarque Élément vide et 0_E

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Caractérisation essentielle évoluée

Savoir-faire. Démontrer que F est un (s.)ev (de E)

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1') \quad 0_E \in F$$

$$(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Caractérisation essentielle évoluée

Savoir-faire. Démontrer que F est un (s.)ev (de E)

Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1') \quad 0_E \in F$$

$$(2) \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F$$

Exercice

Soit $F \subset E$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda.x + y \in F$$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble des matrices scalaires, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'ensemble des matrices scalaires, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Exercice

A démontrer

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Proposition - $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Proposition - $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Proposition - Vision géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ (a, b réels fixés, $(a, b) \neq (0, 0)$) (droite vectorielle).

Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (a, b, c réels fixés, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) (plan vectoriel). Il y a aussi des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Proposition - Sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration

Exercice

Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- ▶ $\mathcal{P}$: ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires ;
- ▶ $\mathcal{I}$: ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaires ;
- ▶ $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 2f(0)\}$;
- ▶ $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) + 1\}$;
- ▶ $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0\}$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Sous-espace séquentiel

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Et pour l'espace vectoriel des suites numériques :

Exercice

Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- ▶ ensemble des suites géométriques de raison q (réel fixé) ;
- ▶ ensemble des suites géométriques ;
- ▶ ensemble des suites arithmétiques ;
- ▶ ensemble des suites convergentes ;
- ▶ ensemble des suites convergeant vers 0.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

⇒ Nombreux exemples

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Double point de vue

Heuristique. Comme pour les groupes : 2 points de vue

Le nom de sous-espace engendré par une partie A de E donne l'idée du plus petit sous-espace vectoriel de E que l'on peut obtenir en ne prenant que des éléments de A . Un espace strictement plus grand (pour l'inclusion) contient nécessairement des éléments qui ne sont pas obtenables à partir des combinaisons linéaires de A . Ce point correspond bien au nom donné, mais ce n'est pas le point de vue le plus simple mathématiquement pour prouver l'existence.

Le second point de vue consiste à considérer tous les espaces vectoriels qui contiennent A et de prendre parmi ceux-ci le plus petit. Or on sait, qu'en faisant l'intersection des espaces, on obtient nécessairement un ensemble qui contient A (qui est dans tous) et qui est le plus petit. C'est bien le même point de vue que celui choisi pour les groupes engendrés.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v.

Théorème - Intersection de s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E . Alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E .
Plus généralement, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E (I fini ou infini). Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v de E .

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v.

Théorème - Intersection de s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E . Alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E .
Plus généralement, soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E (I fini ou infini). Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v de E .

Démonstration

Plus petit des minorants

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Si $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Plus petit des minorants

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Si $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A .

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Plus petit des minorants

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Si $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A .

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Plus petit des minorants

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Si $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie

Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A .

Démonstration

Remarque Si A est déjà un espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

- ▶ Stabilité par addition et multiplication externe par un scalaire

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

- ▶ Stabilité par addition et multiplication externe par un scalaire
- ▶ Ses objets s'appellent des vecteurs (comme avant), mais le point de vue est plus large !
Tout se restreint à une définition de structure.

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- ▶ Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- ▶ Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,
- ▶ Les classiques : $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ ou plus généralement $\mathbb{K}^n$

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

- ▶ Les classiques : $\mathbb{K}[X]$ et comme sev : $\mathbb{K}_n[X]$,
- ▶ Les classiques : $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ ou plus généralement $\mathbb{K}^n$
- ▶ Les exemples d'analyse : $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$...et comme sev :
l'ensemble des fonctions paires...

⇒ Définitions

⇒ Exemples

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

⇒ Définitions

⇒ Exemples

Objectifs

⇒ Définition des espaces vectoriels et sous-espace vectoriel

⇒ De très nombreux exemples

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 24 : Espace vectoriels

3. Famille de vecteurs

- ▶ Exercice n° 488

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

2.1. Loi de composition externe

2.2. Exemples fondamentaux
d'espaces vectoriels

2.3. Combinaisons linéaires

3. Sous-espaces
vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie