

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2. Structure d'e.v.

3. Sous-espaces vectoriels

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2. Structure d'e.v.

3. Sous-espaces vectoriels

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Caractérisation

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

$\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n; n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{K}^n, (a_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in A^n\}.$$

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k \mid (\lambda_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, (a_k) \in A^{(\mathbb{N})} \right\}$$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Caractérisation

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

$\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n; n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{K}^n, (a_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in A^n\}.$$

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k a_k \mid (\lambda_k) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, (a_k) \in A^{(\mathbb{N})} \right\}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Espace engendré par une partie

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Définition - Sous espace vectoriel engendré par une famille

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E le s.e.v engendré par $\{x_i; i \in I\}$. C'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des x_i .

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Espace engendré par une partie

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Définition - Sous espace vectoriel engendré par une famille

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E le s.e.v engendré par $\{x_i; i \in I\}$. C'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des x_i .

Exemple Dans le $\mathbb{R}$ ev $\mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Savoir-faire. Montrer un espace vectoriel par famille génératrice

Cela peut servir à prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel ; par exemple

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 1)\} \\ = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 2, 1))$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Savoir-faire. Montrer un espace vectoriel par famille génératrice

Cela peut servir à prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel ; par exemple

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 1)\} \\ = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 2, 1)) \end{aligned}$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Exercice

Caractériser par une équation le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $A = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2. Structure d'e.v.

3. Sous-espaces vectoriels

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Addition d'espaces vectoriels : $F + G = \text{vect}(F \cup G)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -e.v.

Définition - Somme d'espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v de E ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle somme des s.e.v F_i l'ensemble

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in F_i\}$$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un s.e.v de E et on a

$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contient $F_1 \cup \dots \cup F_n$.)

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un s.e.v de E et on a

$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contient $F_1 \cup \dots \cup F_n$.)

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Lien avec les espaces engendrés

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Addition et partie engendrée

$F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un s.e.v de E et on a

$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contienne $F_1 \cup \dots \cup F_n$.)

Démonstration

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que $F = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Savoir-faire. Caractérisations. $x \in F \cap G$ et $x \in F + G$

On a alors

$$x \in F \cap G \iff x \in F \text{ et } x \in G$$

$$x \in F + G \iff \exists a \in F, \exists b \in G \text{ tels que } x = a + b$$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Savoir-faire. Caractérisations. $x \in F \cap G$ et $x \in F + G$

On a alors

$$x \in F \cap G \iff x \in F \text{ et } x \in G$$

$$x \in F + G \iff \exists a \in F, \exists b \in G \text{ tels que } x = a + b$$

Attention. Deux erreurs classiques qui en découlent

- Si $x \in F + G$ et $x \notin G \not\Rightarrow x \in F$.
- $E = F \oplus G = F \oplus H \not\Rightarrow G = H$.

Ecrire cela serait confondre les notions de complémentarité et de complémentarité

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Proposition - Somme directe

Soient $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v de E ($n \in \mathbb{N}^*$). Il y a équivalence de :

- (i) tout élément x de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ avec $\forall i, x_i \in F_i$
- (ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x_1 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que les F_i sont en somme directe et on note leur somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Proposition - Somme directe

Soient $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v de E ($n \in \mathbb{N}^*$). Il y a équivalence de :

- (i) tout élément x de $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ avec $\forall i, x_i \in F_i$
- (ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x_1 + \dots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que les F_i sont en somme directe et on note leur somme $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Espace supplémentaires ($\neq$ complémentaires)

$\Rightarrow$ Sous-espace
engendré

$\Rightarrow$ Applications
linéaires

Corollaire - Cas de 2 s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E . F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Espace supplémentaires ($\neq$ complémentaires)

$\Rightarrow$ Sous-espace
engendré

$\Rightarrow$ Applications
linéaires

Corollaire - Cas de 2 s.e.v

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E . F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition - Espaces supplémentaires

F_1 et F_2 deux s.e.v de E sont dits supplémentaires si $E = F_1 \oplus F_2$, ce qui équivaut à :

$$E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

ou à : tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 .

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Attention !!

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- ▶ $E = F_1 + F_2$
- ▶ La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Attention !!

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- ▶ $E = F_1 + F_2$
- ▶ La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Exemple Dans le $\mathbb{R}$ -e.v $\mathbb{C}$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Attention !!

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Attention. Notation piégée

Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :

- ▶ $E = F_1 + F_2$
- ▶ La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Exemple Dans le $\mathbb{R}$ -e.v $\mathbb{C}$

Remarque Autour de la notion de supplémentaire

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Exercice d'application

Dans ce genre d'exercice, on exploite souvent le raisonnement en analyse-synthèse.

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Exercice d'application

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

Montrer que $E = F \oplus G$.

- ▶ L'analyse : Supposons que $E = F + G$.
 Soit $x \in E$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
 Il faut découpler y et z , et exprimer (grâce aux propriétés de F et G), y uniquement en fonction de x et z uniquement en fonction de x . . .
 Fin de l'analyse : On ne sait pas si (y, z) existe, mais s'il existe, il est unique. On a $F \cap G = \{0\}$.
- ▶ La synthèse. On fixe x , on reprend y_x et z_x .
 On vérifie : $y_x \in F$, $z_x \in G$ et $y_x + z_x = x$.
 Fin de la synthèse. Pour tout x , le couple $(y, z) \in F \times G$ (tel que $x = y + z$) existe bien. On a $E = F + G$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Exercice d'application

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires

Montrer que $E = F \oplus G$.

- ▶ L'analyse : Supposons que $E = F + G$.
 Soit $x \in E$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.
 Il faut découpler y et z , et exprimer (grâce aux propriétés de F et G), y uniquement en fonction de x et z uniquement en fonction de x . . .
 Fin de l'analyse : On ne sait pas si (y, z) existe, mais s'il existe, il est unique. On a $F \cap G = \{0\}$.
- ▶ La synthèse. On fixe x , on reprend y_x et z_x .
 On vérifie : $y_x \in F$, $z_x \in G$ et $y_x + z_x = x$.
 Fin de la synthèse. Pour tout x , le couple $(y, z) \in F \times G$ (tel que $x = y + z$) existe bien. On a $E = F + G$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v.

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Exercice

Montrer que $\mathcal{P}$ (fonctions paires) et $\mathcal{I}$ (fonctions impaires) sont

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2. Structure d'e.v.

3. Sous-espaces vectoriels

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F . On dit que u est linéaire si

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F . On dit que u est linéaire si

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$$

Savoir-faire. Montrer qu'une application est linéaire

$u : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y)$$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Définition

E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (avec le même corps $\mathbb{K}$, usuellement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition - Application linéaire

Soit u une application de E dans F . On dit que u est linéaire si

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$$

$$(2) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$$

Savoir-faire. Montrer qu'une application est linéaire

$u : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, u(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot u(x) + \mu \cdot u(y)$$

Démonstration

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Proposition - Image d'une application linéaire

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$(1) \quad u(0_E) = 0_F$$

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n,$$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u(x_i)$$

Dans le cas d'une famille infinie $(x_i)_{i \in I}$, si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle, on a aussi $u\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot u(x_i)$.

L'image d'une combinaison linéaire est donc la combinaison linéaire des images (avec les mêmes coefficients).

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v.

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Définition - endo/iso/auto -morphisme

On appelle

- ▶ isomorphisme de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F ;
- ▶ endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E ;
- ▶ automorphisme de E un isomorphisme de E dans E ;
- ▶ forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note

- ▶ $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F (éventuellement $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ si ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$) ;
- ▶ $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ ou E^* l'ensemble des formes linéaires sur E , aussi appelé dual de E ;
- ▶ $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (i.e. $\mathcal{L}(E, E)$).

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Remarque Eléments neutres

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Remarque Eléments neutres

Exemple Donner des exemples :

- endomorphismes de $\mathbb{R}$
- forme linéaire sur $E = \mathbb{R}^4$
- endomorphisme du $\mathbb{R}$ -e.v. $\mathbb{C}$
- applications linéaires du $\mathbb{R}$ -e.v. $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$
- dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- dans $\mathbb{K}[X]$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Exercice

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constitué des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée et I l'application qui à une fonction f associe la primitive de f qui s'annule en 0. Vérifier que D et I sont des endomorphismes de E . S'agit-il d'isomorphismes ? Que peut on dire de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Exercice

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constitué des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée et I l'application qui à une fonction f associe la primitive de f qui s'annule en 0. Vérifier que D et I sont des endomorphismes de E . S'agit-il d'isomorphismes ? Que peut on dire de $D \circ I$ et de $I \circ D$?

Attention. Montrer la bijectivité

L'exemple précédent montrer qu'il faut bien les deux conditions $f \circ g = id$ ET $g \circ f = id$, pour pouvoir affirmer que f (ou g) est bijective. . .

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v.

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Exercice

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E . On considère l'application

$$\begin{aligned}\phi: F \times G &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y.\end{aligned}$$

Montrer que ϕ est linéaire. A quelle condition sur F et G est-ce un isomorphisme ? Quel est alors l'isomorphisme réciproque ?

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle

- noyau de u , l'ensemble

$$\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$$

- image de u , l'ensemble

$$\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle

- ▶ noyau de u , l'ensemble
 $\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- ▶ image de u , l'ensemble
 $\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$

Théorème - Transformation par u linéaire, en sev

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ $\text{Ker } u$ est un s.e.v de E , $\text{Im } u$ est un s.e.v de F
- ▶ Plus généralement, si V est un s.e.v de E et W un s.e.v de F , alors $u^{-1}(W)$ est s.e.v de E et $u(V)$ est un s.e.v de F .

Rappels : $u(V) = \{u(x), x \in V\}$ et $u^{-1}(W) = \{x \in E \mid u(x) \in W\}$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Définition - Image et noyau

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle

- ▶ noyau de u , l'ensemble
 $\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- ▶ image de u , l'ensemble
 $\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = u(E)$

Théorème - Transformation par u linéaire, en sev

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ $\text{Ker } u$ est un s.e.v de E , $\text{Im } u$ est un s.e.v de F
- ▶ Plus généralement, si V est un s.e.v de E et W un s.e.v de F , alors $u^{-1}(W)$ est s.e.v de E et $u(V)$ est un s.e.v de F .

Rappels : $u(V) = \{u(x), x \in V\}$ et $u^{-1}(W) = \{x \in E \mid u(x) \in W\}$

Démonstration

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Exercice

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y - z, x - y + 2z) \end{aligned}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer son noyau et son image.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\}$

u est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } u = F$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

u est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\}$

u est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } u = F$

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$u \text{ est injective} \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\}$$

$$u \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Im } u = F$$

Démonstration

Exercice

L'application linéaire D qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe P' est-elle injective ? surjective ?

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace engendré

⇒ Applications linéaires

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

2. Structure d'e.v.

3. Sous-espaces vectoriels

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarque Interprétation

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

$\Rightarrow$ Sous-espace
engendré

$\Rightarrow$ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Sous-espace
engendré

$\Rightarrow$ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

Démonstration

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

Démonstration

Définition - Espaces isomorphes

Deux $\mathbb{K}$ -e.v. E et F tels qu'il existe un isomorphisme de E dans F sont dits isomorphes.

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $v \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $u \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $v \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $u \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- ▶ Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- ▶ Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev
- ▶ $\text{Vect}(A) = \bigcap_{B \text{ sev contenant } A} B$ est un sev, le plus petit contenant A .

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

- ▶ Si A et B sont des sev, alors $A \cap B$ est un sev
- ▶ $\text{Vect}(A) = \bigcap_{B \text{ sev contenant } A} B$ est un sev, le plus petit contenant A .
- ▶ Si A et B sont des sev, alors
 $A + B = \text{Vect}(A \cup B) = \{x + y, x \in A, y \in B\}$ est un sev.

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- ▶ Ce sont les transformations « naturelles » entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- ▶ Ce sont les transformations « naturelles » entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- ▶ $f : E \rightarrow F$ est linéaire ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in E$,
 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- ▶ Ce sont les transformations « naturelles » entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- ▶ $f : E \rightarrow F$ est linéaire ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in E$,
 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
- ▶ Vocabulaire : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

- ▶ Ce sont les transformations « naturelles » entre espace vectoriel (conservation de la linéarité)
- ▶ $f : E \rightarrow F$ est linéaire ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in E$,
 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
- ▶ Vocabulaire : morphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire
- ▶ Vocabulaire (qui prolonge celui vu sur les matrices) :
 image de f : $\text{Im } f$ ou noyau de f : $\text{Ker } f$.

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

⇒ Sous-espace
engendré

⇒ Applications
linéaires

Objectifs

⇒ Sous-espace vectoriel engendré

⇒ Application linéaire

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 27 : Espace vectoriels
5. Familles de vecteurs
- ▶ Exercice n°494 & 507

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

3.1. Définition et caractérisation

3.2. Exemples

3.3. Sous-espace vectoriel
engendré par une partie

3.4. Somme de sous-espaces
vectoriels

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$