

⇒ Anneau des endomorphismes

⇒ Projecteurs et symétries

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

⇒ Anneau des endomorphismes

⇒ Projecteurs et symétries

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Théorème - Structure d'espace vectoriel

$(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarque Interprétation

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Avec le produit de composition

Théorème - Composition linéaire

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?

La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E .

Démonstration

Définition - Espaces isomorphes

Deux $\mathbb{K}$ -e.v. E et F tels qu'il existe un isomorphisme de E dans F sont dits isomorphes.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $v \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors l'application
 $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, G)$
 $u \mapsto v \circ u$ est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Linéarité de la composition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ v & \mapsto & v \circ u \end{array}$$
 est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ u & \mapsto & v \circ u \end{array}$$
 est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

⇒ Anneau des endomorphismes

⇒ Projecteurs et symétries

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Structure de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.

- ▶ $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe commutatif ;
- ▶ $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- ▶ $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif (sauf si E de dimension finie égale à 1), en particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E ;
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, (\lambda.v) \circ u = \lambda.(v \circ u) = v \circ (\lambda.u)$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Structure de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v.

- ▶ $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe commutatif ;
- ▶ $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- ▶ $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif (sauf si E de dimension finie égale à 1), en particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E ;
- ▶ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, (\lambda.v) \circ u = \lambda.(v \circ u) = v \circ (\lambda.u)$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Exercice

Donner un contre-exemple pour la commutativité.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition - Règles de calcul dans $\mathcal{L}(E)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ u^n par

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall n \geq 1, u^n = u \circ u^{n-1} = \underbrace{u \circ u \dots \circ u}_{n \text{ facteurs}}.$$

Pour u et v qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) on a les formules suivantes :

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \text{ (Formule du binôme)}$$

$$u^n - v^n = (u - v) \circ (u^{n-1} + u^{n-2} \circ v + \dots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1}) \text{ (Factorisation)}$$

$$Id_E - v^n = (Id_E - v) \circ (Id_E + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1})$$

On note parfois $u \circ v = uv$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$$(u+v)^2 =$$

$$, u^2 - v^2 =$$

$$, u^3 - v^3 =$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$$(u+v)^2 = \quad , u^2 - v^2 = \quad , u^3 - v^3 =$$

Remarque Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Relation polynomiale !

Attention. uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application A compléter

$$(u+v)^2 = \quad , u^2 - v^2 = \quad , u^3 - v^3 =$$

Remarque Démonstration

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$ -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $v = \sum_{k=0}^n a_k u^k$
(avec $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{K}$), alors v commute avec toute puissance de
 u , puis que v commute avec $w = \sum_{k=0}^m b_k u^k$ (avec $m \in \mathbb{N}$, $b_k \in \mathbb{K}$).

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E .

L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E .

L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E .

L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

Démonstration

Définition - Homothéties de E

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme $\lambda.Id_E : x \mapsto \lambda.x$ s'appelle l'homothétie de rapport λ .

Une homothétie de rapport non nul est un automorphisme.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

⇒ Anneau des endomorphismes

⇒ Projecteurs et symétries

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Structures de $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Définition - Projecteur

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

L'application

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

s'appelle le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 (ou de direction E_2);

$$\begin{aligned} q = Id_E - p : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

s'appelle le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 (ou de direction E_1).

On dit que p et q sont des projecteurs associés (car ils sont définis par la même décomposition de E en s.e.v supplémentaires).

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

Remarque A partir de l'analyse-synthèse

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Remarque Rappel (?) de la projection dans le plan

Remarque A partir de l'analyse-synthèse

Proposition - Propriétés premières d'un projecteur

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 , alors :

- p est un endomorphisme de E ;
- $E_1 = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ (ensemble des invariants par p);
- $\text{Im } p = E_1$ et $\text{Ker } p = E_2$;
- $p \circ p = p$.

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Remarque Relation entre les deux projecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Remarque Relation entre les deux projecteurs

Théorème - Caractérisation

Soit p un endomorphisme de E .

Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

On a alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Remarque Relation entre les deux projecteurs

Théorème - Caractérisation

Soit p un endomorphisme de E .

Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

On a alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Définition - Symétrie

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 (ou symétrie d'axe E_1 de direction E_2) l'application

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto x_1 - x_2 \end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Proposition - Propriétés premières de s

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.

Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 . Alors

- ▶ si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 on a $s = 2p - Id_E$;
- ▶ s est un endomorphisme de E et $s \circ s = Id_E$ (on dit que s est une involution de E).

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

Proposition - Propriétés premières de s

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.

Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 . Alors

- ▶ si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 on a $s = 2p - Id_E$;
- ▶ s est un endomorphisme de E et $s \circ s = Id_E$ (on dit que s est une involution de E).

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

On a alors $E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id_E)$.

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

On a alors $E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id_E)$.

Démonstration

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Théorème - Caractérisation

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

On a alors $E = \text{Ker}(s - Id_E) \oplus \text{Ker}(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + Id_E)$.

Démonstration

Exercice

$E = \mathbb{R}^2$, on désigne par f l'endomorphisme de E défini par $f((x, y)) = (2x - y, 2x - y)$.

Montrer que f est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques. On notera $E_1 = \text{Im } f$ et $E_2 = \text{Ker } f$.

Donner la détermination analytique de la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1 .

$\Rightarrow \mathcal{L}(E)$

$\Rightarrow$ Projecteurs et symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

- ▶ $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

- ▶ $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel
- ▶ $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

- Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

- ▶ Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- ▶ Alors $p^2 = p$

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

- ▶ Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- ▶ Alors $p^2 = p$
- ▶ Réciproquement, si $p^2 = p$, alors p est la projection de E sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$.

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Conclusion

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

- ▶ Nécessaire : $E = F \oplus G$. $p : x \mapsto y$ tel que $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- ▶ Alors $p^2 = p$
- ▶ Réciproquement, si $p^2 = p$, alors p est la projection de E sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$.
- ▶ $s : x \mapsto y - z$. Alors $s^2 = \text{id}_E$.
Et réciproquement. . .

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries

Objectifs

⇒ Anneau $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et symétries

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 27 : Espace vectoriels
5. Familles de vecteurs
- ▶ Exercice n° 512 & 513
- ▶ TD de jeudi :
 - 8h-10h : 491, 495, 498 505 514, 509
 - 10h-12h : 492, 496, 499, 506, 515, 511

⇒ $\mathcal{L}(E)$

⇒ Projecteurs et
symétries

1. Problèmes

2. Structure d'e.v.

3. S.e.v

4. $\mathcal{L}(E, F)$

4.1. Définitions et exemples

4.2. Cas général : structure de
 $\mathcal{L}(E, F)$

4.3. Cas particulier de $\mathcal{L}(E)$

4.4. Projecteurs et symétries