

⇒ Somme de sous-espaces vectoriels

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application
linéaire

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme de sous-espaces vectoriels

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Extension et extraction de famille

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

On considère toujours, E comme un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition - Sur-famille et sous-famille

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

On appelle sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de E telle que $I \subset J$.

On appelle sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_k)_{k \in K}$ d'éléments de E telle que $K \subset I$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

On considère toujours, E comme un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition - Sur-famille et sous-famille

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

On appelle sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de E telle que $I \subset J$.

On appelle sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_k)_{k \in K}$ d'éléments de E telle que $K \subset I$.

Exemple Interprétation géométrique

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme de sous-espaces vectoriels

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Définition - Famille génératrice

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n éléments de E .

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F si

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, x_i \in F$$

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Définition - Famille génératrice

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n éléments de E .

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F si

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, x_i \in F$$

Démonstration

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Définition - Famille génératrice

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n éléments de E .

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F si

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, x_i \in F$$

Démonstration

Remarque Partie génératrice

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Définition - Famille génératrice

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n éléments de E .

On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de F si

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si

$$\forall x \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, x_i \in F$$

Démonstration

Remarque Partie génératrice

Exercice

Donner des exemples de familles génératrices de :

- $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^3$
- le $\mathbb{R}$ -e.v $\mathbb{C}$
- $\mathbb{K}_n[X]$
- de $\{y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' + y' - 2y = 0\}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Attention. Ne pas s'emballer pour une famille génératrice

Parfois, en cherchant une famille génératrice de F , on se rend compte que tout vecteur de F s'écrit comme une C.L. des vecteurs $(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

L'erreur consisterait à écrire que $F = \text{vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

La seule chose qu'on ait, est une inclusion $F \subset \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$.

Il faut donc vérifier l'inclusion réciproque : est-ce que tout $f_i \in F$?

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Permutation

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Permutation

Si la famille (x_i) est génératrice de E , ajouter d'autres vecteurs à la famille ne peut pas faire perdre le caractère générateur de la famille :

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Permutation

Si la famille (x_i) est génératrice de E , ajouter d'autres vecteurs à la famille ne peut pas faire perdre le caractère générateur de la famille :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E .

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Permutation

Si la famille (x_i) est génératrice de E , ajouter d'autres vecteurs à la famille ne peut pas faire perdre le caractère générateur de la famille :

Proposition

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E .

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Définition - Famille génératrice minimale de E

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale de E , si aucune sous-famille stricte $(x_i)_{i \in H}$ n'est génératrice de E (avec $H \subset I$ et $H \neq I$).

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Définition - Famille génératrice minimale de E

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale de E , si aucune sous-famille stricte $(x_i)_{i \in H}$ n'est génératrice de E (avec $H \subset I$ et $H \neq I$).

Définition - Généralisation (I potentiellement infini)

La famille d'éléments de E $(x_i)_{i \in I}$ (I infini) est dite génératrice de E , si $\text{Vect}((x_i)_{i \in I}) = E$,
c'est-à-dire si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de E .

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme de sous-espaces vectoriels

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Famille libre, vecteurs linéairement indépendants

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Définition - Famille libre (ou vecteurs linéairement indépendants)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

- ▶ On dit que cette famille est une famille libre (ou que $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants) si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

- ▶ Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée (ou que $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs linéairement dépendants), c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ (non tous nuls) tel que $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0_E$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Famille libre, vecteurs linéairement indépendants

Définition - Famille libre (ou vecteurs linéairement indépendants)

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

- ▶ On dit que cette famille est une famille libre (ou que $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants) si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

- ▶ Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée (ou que $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs linéairement dépendants), c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ (non tous nuls) tel que $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0_E$.

Remarque Interprétation importante !

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Proposition - Cas de famille liée

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

- ▶ Si $n = 1$, la famille est liée si et seulement si $x_1 = 0_E$.
- ▶ Si l'un des x_i est égal à 0_E , alors la famille est liée.
- ▶ Si $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, alors la famille est liée.
- ▶ Si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille est liée.
- ▶ Réciproquement, si $n \geq 2$ et si la famille est liée, alors l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Proposition - Cas de famille liée

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

- ▶ Si $n = 1$, la famille est liée si et seulement si $x_1 = 0_E$.
- ▶ Si l'un des x_i est égal à 0_E , alors la famille est liée.
- ▶ Si $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, alors la famille est liée.
- ▶ Si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille est liée.
- ▶ Réciproquement, si $n \geq 2$ et si la famille est liée, alors l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Pour 2 vecteurs : la colinéarité

Remarque Colinéarité (DEUX vecteurs)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Exercice

On note $f_k : x \mapsto e^{-kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

La proposition suivante découle des définitions :

Proposition - Manipulation des termes de la famille

Une permutation des vecteurs ne change pas le caractère libre ou lié d'une famille.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

La proposition suivante découle des définitions :

Proposition - Manipulation des termes de la famille

Une permutation des vecteurs ne change pas le caractère libre ou lié d'une famille.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Définition - Famille libre maximale

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale dans E , si aucune sur-famille stricte $(x_i)_{i \in J}$ n'est libre (avec $I \subset J$ et $I \neq J$).

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Définition - Famille libre maximale

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale dans E , si aucune sur-famille stricte $(x_i)_{i \in J}$ n'est libre (avec $I \subset J$ et $I \neq J$).

Définition - Généralisation

Une famille infinie $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite libre si toute sous-famille finie est libre.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Exemple avec $\mathbb{K}[X]$

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Exemple Famille libre infinie...

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Exemple Famille libre infinie...

Et plus généralement :

Théorème - Degrés échelonnés

Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degrés échelonnés (distincts deux à deux...) est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Exemple avec $\mathbb{K}[X]$

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Exemple Famille libre infinie...

Et plus généralement :

Théorème - Degrés échelonnés

Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degrés échelonnés (distincts deux à deux...) est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Théorème - Application linéaire et familles de vecteurs

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, alors $u\left(\text{Vect}(x_i)\right) = \text{Vect}\left(u(x_i)\right)$.
- ▶ Si u est injective alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F . Réciproquement, si l'image par u de n'importe quelle famille libre de E est libre, alors u est injective.
- ▶ Si u est surjective alors l'image par u d'une famille génératrice de E (s'il en existe) est une famille génératrice de F .
- ▶ Si u est un isomorphisme, l'image par u d'une base de E (s'il en existe) est une base de F . Réciproquement, si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que son image par u soit une base de F , alors u est un isomorphisme.

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Théorème - Application linéaire et familles de vecteurs

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, alors $u(\text{Vect}(x_i)) = \text{Vect}(u(x_i))$.
- ▶ Si u est injective alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F . Réciproquement, si l'image par u de n'importe quelle famille libre de E est libre, alors u est injective.
- ▶ Si u est surjective alors l'image par u d'une famille génératrice de E (s'il en existe) est une famille génératrice de F .
- ▶ Si u est un isomorphisme, l'image par u d'une base de E (s'il en existe) est une base de F . Réciproquement, si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que son image par u soit une base de F , alors u est un isomorphisme.

Démonstration

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Réciproque pour la surjectivité ?

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Remarque Réciproque pour la surjectivité ?

Exercice Retrouver l'image de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y + 2z)$

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

- ▶ Sur-famille (extension) et sous-famille (extraction)

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

- ▶ Sur-famille (extension) et sous-famille (extraction)
- ▶ Famille génératrice de F . Toute sur-famille reste génératrice de F .
 $\iff$ Surjectivité de Φ

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

- ▶ Sur-famille (extension) et sous-famille (extraction)
- ▶ Famille génératrice de F . Toute sur-famille reste génératrice de F .
 $\iff$ Surjectivité de Φ
- ▶ Famille libre. Toute sous-famille reste libre.
 $\iff$ Injectivité de Φ

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

- ▶ Sur-famille (extension) et sous-famille (extraction)
- ▶ Famille génératrice de F . Toute sur-famille reste génératrice de F .
 $\iff$ Surjectivité de Φ
- ▶ Famille libre. Toute sous-famille reste libre.
 $\iff$ Injectivité de Φ
- ▶ Stabilité par un endomorphisme

⇒ Somme

⇒ A partir de familles de vecteurs

1. Problèmes

2. Structure d'espace vectoriel

3. Sous-espaces vectoriels

4. Applications linéaires

5. Familles de vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

⇒ Somme

⇒ A partir de familles
de vecteurs

Objectifs

⇒ Espace vectoriel à partir de familles de vecteurs (atomes de base)

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 20 : Continuité
- ▶ Exercice n°497 & 510

1. Problèmes

2. Structure d'espace
vectoriel

3. Sous-espaces
vectoriels

4. Applications
linéaires

5. Familles de
vecteurs

5.1. Sur-famille, sous-famille

5.2. Familles génératrices

5.3. Familles libres, liées

5.4. Image d'une famille de
vecteurs par une application
linéaire