Devoir à la maison n°10
CORRECTION

Problème I - Fonction indicatrice de Dirichlet

I. Ensembles exceptionnels dénombrables.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'une partie dénombrable $E = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$.
   Soit $\epsilon > 0$. Considérons ensuite $\delta_{\epsilon,E} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{k+1}\times|f(u_k)|} & \text{si } x = u_k \in E \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
   δ est bien une jauge sur $[a, b]$
   Soit $\mathcal{P}$, une subdivision δ-fine. On suppose que $\mathcal{P} = (([x_{i-1}, x_i], t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
   Alors $|S(f, \mathcal{P})| = \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|$.
   La plupart des fois, $t_i \notin E$ et donc $f(t_i) = 0$. Mais si $t_i = u_k$, alors
   $$|f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leqslant |f(t_i)| \times \delta(t_i) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$
   Et donc $|S(f, \mathcal{P})| \leqslant \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \epsilon$.
   Donc
   $$\boxed{f \text{ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et que } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ est nulle.}}$$

2. Notons $f = g - h$. Alors f est nulle sauf sur E.
   Donc f est Kurzweil-Henstock sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.
   Supposons que g soit KH-intégrable alors $h = g-f$ est intégrable (on prend une jauge min δ_f, δ_g).
   Donc h est alors KH-intégrable et $\displaystyle\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b g$.
   L'implication réciproque est en fait la même (avec $-f$).
   $$\boxed{\text{Donc } g \text{ est KH-intégrable ssi } h \text{ est KH-intégrable. Dans ce cas } \int_a^b g = \int_a^b h}$$

II. Fonction de Dirichlet

Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}}$,indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel.
Soit n un entier strictement positif. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $a_j = \frac{j}{n}$.

1. On sait que $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = E$ est un ensemble dénombrable.
   f est donc nulle sur le complémentaire d'un ensemble dénombrable.
   $$\boxed{\text{Donc } f \text{ est intégrable au sens de Kurzweil- Henstock sur l'intervalle } [0, 1] \text{ et } \int_0^1 f = 0.}$$

2. Soit $([a_j, a_{j+1}])$ une subdivision de $[0, 1]$.
   C'est rappeler dans l'énoncé : « tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel. »
   C'est le cas de $[a_j, a_{j+1}] \neq \emptyset$.
   $$\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0, n-1]\!], \text{ il existe } x_j,\ y_j \in [a_j, a_{j+1}] \text{ tels que } f(x_j) = 1 \text{ et } f(y_j) = 0.}$$

3. On considère les deux subdivisions pointées

$$D_1 = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leqslant j < n} \qquad \text{et} \qquad D_2 = \{([a_j, a_{j+1}], y_j)\}_{0 \leqslant j < n}.$$

Comme, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, x_j est rationnel, alors (télescopage)

$$S(f, D_1) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 1(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0 = 1 - 0 = 1$$

Et de même

$$S(f, D_2) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} 0(a_j - a_{j-1})0$$

$$\boxed{\text{Bilan : } S(f, D_1) = 1 \text{ et } S(f, D_2) = 0.}$$

4. On prend $\epsilon < \frac{1}{2}$, par exemple $\epsilon = \frac{1}{3}$.
Si f est Riemann-intégrable d'intégrale égale à I, alors il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall\ \sigma = (a_0 = 0, a_1, \dots a_n = 1) \mid 0 < a_j - a_{j-1} < \delta, \forall\ t_j \in [a_{j-1} - a_j], \qquad |\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(a_j - a_{j-1}) - I| \leqslant \epsilon$$

Or on a vu à la question précédente, qu'indépendamment de δ, on peut donner la valeur 0 ou 1 au nombre $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(t_j)(a_j - a_{j-1})$ On a donc nécessairement

$$|1 - I| \leqslant \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad |0 - I| \leqslant \frac{1}{3}$$

Cela est impossible.

$$\boxed{\text{f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur } [0, 1].}$$

Problème II - Endomorphisme antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E.
Un endomorphisme f de E est dit antisymétrique si $\forall\ x, y \in E$, $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

I. Un exemple

Ici E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $B = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E et $u = a.i + b.j + c.k$ un vecteur non nul de E.
On considère ici $f : E \to E$ l'application définie par : $\forall\ x \in E$, $f(x) = u \wedge x$.

1. Pour tout $x, y \in E$, d'après la définition du produit vectoriel :

$$(f(x)|y) = (u \wedge x|y) = [u, x, y] = -[u, y, x] = -(u \wedge y|x) = -(x|u \wedge y) = -(x|f(y))$$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est un endomorphisme antisymétrique.}}$$

2. $u \wedge x = 0$ ssi (u, x) lié, donc

$$\boxed{\text{Ker } f = \{x \in E \mid u \wedge x = 0\} = \{x \mid (x, u) \text{ lié}\} = \text{vect}(u)}$$

Nécessairement, pour tout $x \in E$, $f(x) \perp u$, donc Im $f \subset \text{vect}(u)^{\perp}$.
En outre, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim E - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2 = \dim(\text{vect}(u)^{\perp})$.

$$\boxed{\text{Im } f = \text{vect}(u)^{\perp}}$$

3. $f(i) = (a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k) \wedge i = a(i \wedge i) + b \cdot (j \wedge i) + c \cdot (k \wedge i) = 0 - b \cdot k + c \cdot j$.
De même $f(j) = a \cdot k - c \cdot i$ et $f(k) = -a \cdot j + b \cdot i$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice antisymétrique.}}$$

II. Etude générale

On revient au cas général où E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit f un endomorphisme de E.
Supposons que f est antisymétrique.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ une base orthonormée de E. On note $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

$$\text{Coef}_{i,j}(M) = (f(e_i)|e_j) = -(e_i|f(e_j)) = -(f(e_j)|e_i) = -\text{Coef}_{j,i}(M) = -\text{Coef}_{i,j}(M^T)$$

Donc M est une matrice antisymétrique.
Supposons que M la matrice représentative de f dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots e_n)$ est antisymétrique.
Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, le calcul matriciel donne $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} x_j \text{Coef}_{i,j}(M) e_i$.
Par bilinéarité du produit scalaire :

$$(f(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \text{Coef}_{i,j}(M) \sum_{k=1}^{n} x_k (e_i|e_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \text{Coef}_{j,k}(M)$$

$$2(f(x)|x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \text{Coef}_{j,k}(M) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \text{Coef}_{j,k}(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \text{Coef}_{j,k}(M) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \text{Coef}_{k,j}(M) = 0$$

Enfin, supposons que pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.
Soient $u, v \in E$, par linéarité de f et du produit scalaire

$$0 = (f(u+v)|u+v) = (f(u) + f(v)|u+v) = \underbrace{(f(u)|u)}_{=0} + (f(u)|v) + \underbrace{(f(v)|v)}_{=0} + (f(v)|u)$$

Donc $(f(u)|v) = -(f(v)|u) = -(u|f(v))$ et f est antisymétrique.
On a donc établit les équivalences :

$$\boxed{\begin{array}{rl} f \text{ est antisymétrique} \Leftrightarrow & \text{la matrice représentative de } f \text{ dans une base orthonormée est antisymétrique} \\ \Leftrightarrow & \forall\, x \in E,\ (f(x)|x) = 0. \end{array}}$$

2. On note $A(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes antisymétriques de E .
(a) $0 \in A(E)$ donc $A(E)$ est non vide.
Soient $f_1, f_2 \in A(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Par linéarité(s) :

$$\forall\, x \in E, \quad ((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)|x) = \cdots = \lambda_1 (f_1(x)|x) + \lambda_2 (f_2(x)|x) = 0 + 0 = 0$$

Donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in A(E)$

$$\boxed{A(E) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$$

(b) D'après 1., $A(E)$ est isomorphe à $A_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.
Donc ils ont même dimension :

$$\boxed{\dim A(E) = \frac{n(n-1)}{2}}$$

3. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.
(a) Soit $\mathcal{B}$, une base orthonormée de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$\det(f) = \det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^n \det M = (-1)^n \det(f)$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, alors nécessairement } \det f = 0 \text{ et donc } f \text{ n'est pas inversible.}}$$

(b) Soit $(x, y) \in \text{Ker } f \times \text{Im } f$. On peut supposer que $y = f(a)$.

$$(x|y) = (x|f(a)) = -(f(x)|a) = -(0|a) = 0$$

Donc Ker f et Im f sont orthogonaux.
Comme $\dim(\text{Ker } f^{\perp}) = \dim E - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$, on en déduit :

$$\boxed{\text{Im } f = (\text{Ker } f)^{\perp}}$$

(c) Notons $g = f_{|\text{Im } f}$,

$$\forall\, x, y \in \text{Im } f, \qquad (g(x)|y) = (f(x)|y) = -(x|f(y)) = -(x|g(y))$$

donc g est antisymétrique.
Soit $x \in \text{Ker } g$, alors $g(x) = f(x) = 0$, donc $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \text{Ker } f \cap (\text{Ker } f)^{\perp} = \{0\}$.
Donc g est injectif.

$\boxed{\text{Bilan : la restriction de } f \text{ à Im } f \text{ est un endomorphisme antisymétrique injectif de Im } f.}$

(d) Si $\text{rg}(f)$ est impair, alors g est antisymétrique sur un espace de dimension impair, donc d'après 2.a), $\det(g) = 0$.
Or g est injectif donc inversible. On a donc une contradiction.

$\boxed{\text{Ainsi, le rang de } f \text{ est pair.}}$

III. Description des endomorphismes antisymétriques en dimension 3

On se place à nouveau dans le cas où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Dans cette partie, on désire établir que pour tout endomorphisme antisymétrique de E , il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

1. $\boxed{\text{Pour l'endomorphisme nul, on trouve le résultat attendu avec } a = 0}$

2. On suppose dans cette question que f n'est pas nul.

(a) D'après la partie précédente, le rang de f est nécessairement pair.
Il est inférieur à $3 = \dim(E)$, donc il vaut 0 ou 2.
Or f est non nul, donc $\text{rg}(f) \neq 0$.

$\boxed{\text{Bilan : le rang de } f \text{ vaut 2.}}$

(b) Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe adaptée à $E = \text{Im } f \oplus^{\perp} \text{Ker } f$.
On a donc $\dim(\text{Ker } f) = 1$, donc $k \in \text{Ker } f$ et $f(k) = 0$.
$i, j \in (\text{Ker } f)^{\perp}$, donc $(f(i)|k) = (f(j)|k) = 0$.
Par ailleurs, $(f(i)|i) = (f(j)|j) = 0$.
Enfin, si on note $(f(j)|i) = a$, alors $(f(i)|j) = -(f(j)|i) = -a$.
Dernière chose, rappelons que $\text{Coef}_{h,k}(M) = (f(e_k)|e_h)$, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{M}_{(i,j,k)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Après détermination de $\mathcal{B}$ selon la question précédente, on considère alors $u = -ak$ et $f_u : x \mapsto u \wedge x$.
Alors d'après la première partie $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et donc $f = f_u$.
L'unicité est assurée, il suffit d'un raisonnement en analyse. On est bien obligé de prendre u de cette forme.

$\boxed{\text{Pour tout } f \in \text{Ł}(E) \text{ antisymétrique, il existe un unique } u \in E \text{ tel que : } \forall\, x \in E,\ f(x) = u \wedge x.}$