

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

Problème Image d'un intervalle par une fonction continue ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Problèmes

Problème Limite. Propriété algébrique

Problème Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Problème Fonction nulle part continue ?

Problème Image d'un intervalle par une fonction continue ?

Problème Continuité prolongée

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.3. Opérations sur les limites

Limite

I est toujours un intervalle.

Rappel : définition de voisinage ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Limite

I est toujours un intervalle.

Rappel : définition de voisinage ?

Définition - Limite

Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité (éventuellement infinie) de I .

On dit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a si

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, f^{-1}(W) := [f \in W] \in \mathcal{V}_a .$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Limite

I est toujours un intervalle.

Rappel : définition de voisinage ?

Définition - Limite

Soient f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité (éventuellement infinie) de I .

On dit que f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers a si

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

ou de manière équivalente :

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, f^{-1}(W) := [f \in W] \in \mathcal{V}_a.$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

L'avantage : on a créé une définition unifiée. Elle est même unique pour le cas de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \dots$

Mais on peut aussi la décomposer en 9 parties.

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Exemple $x \mapsto x \ln x$

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Remarques

Remarque Rappel sur les images réciproques.

Analyse - Pourquoi ces deux définitions sont équivalentes ?

Exemple $x \mapsto x \ln x$

Attention. L'importance de l'intervalle de définition

Notons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

En revanche, $f_1 : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ est continue en 0. Puisqu'ici, par définition de I , la limite de f en 0 impose de regarder $x \rightarrow 0^-$.

Ainsi si une fonction f n'est pas définie sur un intervalle (mais une réunion, par exemple), il faudrait préciser le lieu d'étude de la continuité. On pourrait écrire ici que f **est continue en 0 selon l'intervalle** $\mathbb{R}_-$.

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Ordre des quantificateurs

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Ordre des quantificateurs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	$a = -\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$
$\ell = -\infty$	$\forall Y < 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \leq Y$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\forall \epsilon > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$
$\ell = +\infty$	$\forall Y > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \geq Y$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Ordre des quantificateurs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	$a = -\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$
$\ell = -\infty$	$\forall Y < 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \leq Y$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\forall \epsilon > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$
$\ell = +\infty$	$\forall Y > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \geq Y$

Remarque Inégalités larges ou strictes

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Ordre des quantificateurs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Remarque Ordre et quantificateurs

Remarque Selon la nature de a et de ℓ

$$\forall W \in \mathcal{V}_\ell, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid f(I \cap V) \subset W$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$	$a = -\infty$	$a \in \mathbb{R}$	$a = +\infty$
$\ell = -\infty$	$\forall Y < 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq Y$	$\forall Y < 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \leq Y$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\forall \epsilon > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$	$\forall \epsilon > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) - \ell \leq \epsilon$
$\ell = +\infty$	$\forall Y > 0, \exists X < 0 \mid x \leq X \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists \eta > 0 \mid x - a \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq Y$	$\forall Y > 0, \exists X > 0 \mid x \geq X \Rightarrow f(x) \geq Y$

Remarque Inégalités larges ou strictes

Exemple Cas simples

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Unicité

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique.

Lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ($(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$), cette proposition permet donc de parler de « la » limite de f en a et de noter $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Unicité

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, celle-ci est unique.

Lorsque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ($(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$), cette proposition permet donc de parler de « la » limite de f en a et de noter $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Démonstration

1. Problèmes

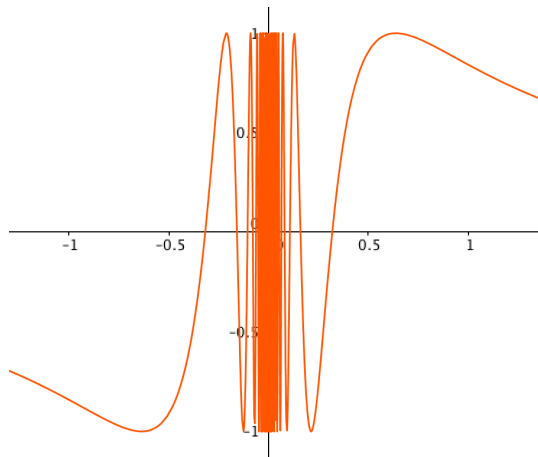
2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Fonction sans limite



La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.
Sauriez-vous le prouver ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Proposition - Limite finie donc bornée

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de a .

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Proposition - Limite finie donc bornée

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de a .

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Limite « sur le côté »

Proposition - Limite à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- ▶ On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne inférieure de I . On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à gauche si la fonction $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet ℓ pour limite en a , c'est-à-dire, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x < a} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$.

- ▶ On suppose que $a \in \mathbb{R}$ n'est pas la borne supérieure de I . On dit que f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite à droite si la fonction $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet ℓ pour limite en a , c'est-à-dire, dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$$

On note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x > a} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$.

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite -1

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Proposition - Limite et limite à gauche et droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si a n'est pas une extrémité de I , f admet ℓ pour limite en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a et si $f(a) = \ell$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite -1

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Proposition - Limite et limite à gauche et droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si a n'est pas une extrémité de I , f admet ℓ pour limite en a si et seulement si f admet ℓ pour limite à gauche et à droite en a et si $f(a) = \ell$.

Si a est une extrémité de I , on a le même résultat en supprimant la limite à gauche ou la limite à droite.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite α , la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ .

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite α , la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ .

Remarque Convergence de suites et voisinage

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite α , la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ .

Remarque Convergence de suites et voisinage
Démonstration

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Caractérisations de limite - 2

Théorème - Caractérisation séquentielle

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point ou une extrémité de I . Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On a $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de I ayant pour limite α , la suite $(f(u_n))$ a pour limite ℓ .

Remarque Convergence de suites et voisinage

Démonstration

Exercice

Prouver que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

De même on prouverait que les fonctions $\sin$ ou $\cos$ n'ont pas de limite en $+\infty$.

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Inégalités

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leq g(x)$ et que
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leq \ell'$.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Inégalités

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leq g(x)$ et que
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Inégalités

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient f, g deux fonctions définies sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que sur un voisinage V de a on a $f(x) \leq g(x)$ et que
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration

Exercice

Refaire la démonstration en exploitant le théorème sur les suites.

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle
de la limite et
conséquences

⇒ Comment obtenir
la limite d'une
fonction en un point ?

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes »

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de a et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ et que

$\forall x \in V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Alors le fonction g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

1. Problèmes

2. Limites (de
fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Théorème de limite par encadrement, dit « des gendarmes »

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage V de a et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ et que

$\forall x \in V, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Alors le fonction g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Divergence vers $+\infty$ par minoration (resp. $-\infty$ par majoration)

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$. Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad (1)$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Divergence vers $+\infty$ par minoration (resp. $-\infty$ par majoration)

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $\forall x \in V, f(x) \leq g(x)$. Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad (1)$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty \quad (2)$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Définition formelle de la limite et conséquences

$\Rightarrow$ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

2.3. Opérations sur les limites

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \bar{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et que $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Composition

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \bar{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et que $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Démonstration

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Composition

Théorème - Composition des limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$, $f(I) \subset J$. Soit $a \in \bar{I}$ (élément ou extrémité de I). On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et que $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$. Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Démonstration

On voit ici l'idée principale de la définition des limites de fonctions : penser en application réciproque (de l'arrivée vers le départ).

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Lemme

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Lemme -

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et g bornée au voisinage de a ,
alors $(f \times g) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Lemme

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Lemme -

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et g bornée au voisinage de a ,
alors $(f \times g) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Démonstration

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

- ▶ En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

- ▶ En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.
- ▶ $\forall A < 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| < \eta \implies f(x) < A$ (?)

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

- ▶ En a ou en $+\infty$, vers ℓ ou vers $+\infty$.
- ▶ $\forall A < 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - a| < \eta \implies f(x) < A$ (?)
- ▶ Conséquence sur la caractère bornée de la fonction, ordre conservée sur les limites...

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?
 - ▶ Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
(tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?
 - ▶ Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
(tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
 - ▶ Par composition

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?
 - ▶ Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
(tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
 - ▶ Par composition
 - ▶ Théorème des gendarmes (ou encadrement)

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Définition formelle de la limite et conséquences
- ⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?
 - ▶ Par opérations arithmétiques sur $\overline{\mathbb{R}}$
(tout va bien tant qu'il n'y a pas de forme indéterminée)
 - ▶ Par composition
 - ▶ Théorème des gendarmes (ou encadrement)
 - ▶ Cas de la limite monotone.

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites

Conclusion

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Objectifs

⇒ Définition formelle de la limite et conséquences

⇒ Comment obtenir la limite d'une fonction en un point ?

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 20 : Continuité
3. Fonction continue sur un ensemble
- ▶ Exercices pour vendredi : n° 404 & 405

1. Problèmes

2. Limites (de fonctions)

2.1. Définitions

2.2. Ordre et limites

2.3. Opérations sur les limites