Chapitre 34

Déterminants

Résumé -

Il s'agit d'élargir la définition du déterminant vue pour des matrices d'ordre $n = 2$ à tout ordre n.
Mais pour cela, nous faisons un détour vers les formes n-linéaires alternés. Il n'y a qu'une possibilité (à un facteur multiplicatif près). Et ainsi, on obtient beaucoup plus qu'une formule généralisée. On trouve une formule explicite et plein de petits trucs intéressants dont :

- *la formule* polynomiale hyper-symétrique *(d'où la référence au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$)*
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- *Par blocs :* $\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix} = \det A \times \det D$
- *une formule explicite (à usage théorique, exclusivement...) du calcul de A^{-1}...*

Sommaire

1. Problèmes

Un seul problème nous motive ici, mais il conduit à divers sous-problème. Existe-t-il une fonction qui pour une matrice donnée indique, par un calcul, si oui ou non, la matrice est inversible ?

? Problème 147 - Réflexion selon la dimension

Nous savons qu'une telle fonction existe pour les matrices de taille 2. Il s'agit de

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\det(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.
Par ailleurs, on sait que le rang d'une matrice est égal à la taille de la plus grande sous-matrice inversible.
Est-il possible, de créer par récurrence la fonction $\det_n$ (recherchée) pour une matrice de rang n, connaissant l'expression de $\det_{n-1}$?

? Problème 148 - Réflexion selon la famille des colonnes

A est inversible si et seulement si $(C_1(A), \dots C_n(A))$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
La fonction $\det(A)$ recherchée doit donc pouvoir être liée à une fonction sur les familles de vecteurs qui indiquent si une telle famille est une base.

$$d(X_1, \dots X_n) = 0 \Longrightarrow (X_1, \dots X_n) \text{ libre/base/génératrice de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Que dire de d, si $X_i = 0$ ou si X_j est une combinaison linéaire des autres $(X_k)_{k \neq j}$?
Que dire de d si l'on échange deux vecteurs X_i et X_j ?

? Problème 149 - Signification de la valeur du déterminant

Supposons qu'on ait trouvé $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = 0$ si et seulement si A non inversible.
Mais alors que dire de A par rapport à A' si $\det(A) = 1$ et $\det(A') = 10$?

? Problème 150 - Multiplicativité de la fonction déterminant.

Supposons qu'on ait trouvé $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tel que $\det(A) = 0$ si et seulement si A non inversible.
Que peut-on dire de $\det(AB)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$?

? Problème 151 - Système de Cramer. Inversion d'une matrice avec le déterminant

On cherche un vecteur X solution du système $AX = b$.
Peut-on trouver exprimer (au moins théoriquement) chaque coordonnée x_i de X en fonction de $\det A$ et de quelque chose d'autre ? Quoi ? Est-ce un calcul simple ?
Et plus largement (mais de manière équivalente), peut-on exprimer (au

moins théoriquement avec un calcul simple) A^{-1} en fonction de A et $\det(A)$? En fonction d'autres nombres ?

2. Applications multilinéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. Définitions

Définition - Application n-linéaire
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que $\Phi : E^n \to F$ est une application n-linéaire si

$$\begin{aligned}&\forall (X_1,\dots,X_n) \in E^n,\ \forall (X,Y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\ i \in [\![1,n]\!]\\ &\Phi(X_1,\dots,X_{i-1},\lambda X + \mu Y, X_{i+1},\dots,X_n)\\ &\qquad = \lambda\Phi(X_1,\dots,X_{i-1},X,X_{i+1},\dots,X_n) + \mu\Phi(X_1,\dots,X_{i-1},Y,X_{i+1},\dots,X_n)\end{aligned}$$

c'est-à-dire si $\forall i \in [\![1,n]\!], \Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1,\dots,X_{i-1},X,X_{i+1},\dots,X_n)$ est linéaire.
On note $\mathscr{L}_n(E,F)$ l'ensemble des applications n-linéaires de E^n dans F.

Histoire - Bourbaki et déterminant.
L'exposition faite ici sur la notion du déterminant suit une forme très moderne de la pensée. Elle remonte à la période de Nicolas Bourbaki. Nous encourageons le lecteur à découvrir qui est Nicolas Bourbaki...

Définition - Forme n-linéaire
Si Φ est une application n-linéaire de E^n dans $\mathbb{K}$,
on dit que Φ est une forme n-linéaire sur E. ($\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K}) = \mathscr{L}_n(E)$)

Définition - Forme n-linéaire symétrique ou antisymétrique
On dit que Φ, forme n-linéaire sur E, est :
- symétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1,\dots,X_n) \in E^n, \qquad \Phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) = \Phi(X_1,\dots,X_n)$$

- antisymétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1,\dots,X_n) \in E^n, \qquad \Phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(X_1,\dots,X_n)$$

Proposition - Caractérisation et permutation
Φ est symétrique si et seulement si,
lorsque l'on échange deux vecteurs, le résultat est inchangé.
Φ est antisymétrique si et seulement si,
lorsque l'on échange deux vecteurs, le résultat se transforme en son opposé.

Démonstration

Définition - Forme n-linéaire alternée
Une forme n-linéaire Φ sur E est dite alternée si
$\forall (X_1,\dots,X_n) \in E^n, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,$
$X_i = X_j \Rightarrow \Phi(X_1,\dots,X_i,\dots,X_j,\dots,X_n) = 0$

Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique
Soit Φ une forme n-linéaire sur E. Alors on a

$$\Phi \text{ antisymétrique } \Longleftrightarrow \Phi \text{ alternée.}$$

Démonstration

2.2. Expression d'une forme n-linéaire alternée relativement à une base donnée

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme n-linéaire (antisymétrique) ?

Analyse - Ecriture sur une base pour une forme alternée

Cette analyse donne la démonstration de la proposition suivante :

Proposition - Ecriture selon une base
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 2$, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On considère $\Phi \in \mathscr{A}_n(E)$ (forme n-linéaire alternée).
Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \ldots x_{\sigma(n)n} \epsilon(\sigma) \Phi(e_1, \ldots, e_n)$$

où $\forall\ j \in \mathbb{N}_n$, $X_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$

3. Déterminant

3.1. Déterminant de n vecteurs

Définition - Déterminant de n vecteurs
Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n vecteurs de E, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$.
On appelle déterminant de $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base $\mathscr{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n}.$$

On note

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque - Pour $n = 2$ ou $n = 3$ on a
Comme les permutations de $\{1,2\}$ sont $\sigma_1 = \mathrm{id}$, de signature égale à 1 et $\sigma_2 = (1,2)$ de signature égale à -1, on a

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = +1 x_{1,1} x_{2,2} - 1 x_{2,1} x_{1,2}$$

C'est la formule bien connue.
Comme les permutations de $\{1,2,3\}$ sont $\sigma_1 = \mathrm{id}$, $\sigma_2 = (1,3,2)$ et $\sigma_3 = (1,2,3)$ de signature égale à 1 et $\sigma_4 = (1,2)$, $\sigma_5 = (1,3)$ et $\sigma_6 = (2,3)$ de signature égale à -1, on a

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = +1 x_{1,1} x_{2,2} x_{3,3} + x_{3,1} x_{1,2} x_{2,3} + x_{2,1} x_{3,2} x_{1,3} - 1 x_{2,1} x_{1,2} x_{3,3} - x_{1,3} x_{2,2} x_{3,1} - x_{1,1} x_{2,3} x_{3,2}$$

C'est la formule moins bien connue.

Histoire - Découverte
La notion de déterminant a été découverte par Leibniz. Il cherchait une méthode (la plus abstraite possible) pour résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues (avec $n \leqslant 5$). Dans ce cas, la notion de déterminant émerge naturellement. Il a alors démontré toutes les formules qui suivent sauf $\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$.
Très étonnement, exactement au même moment, dans le Japon replié sur lui-même, le mathématicien Seki Kowa (1642-1708) faisait des découvertes comparables. . .

Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{array}{rccl} \det_{\mathscr{E}} : & E^n & \to & \mathbb{K} \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_{\mathscr{E}}(e_1,\ldots,e_n) = 1$.

Démonstration

Théorème - Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.
Alors l'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathscr{E}}$.
$\det_{\mathscr{E}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1,\ldots,e_n) = 1$, les autres formes n-linéaires alternées lui sont proportionnelles.

Démonstration

Théorème - Changement de base
Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{E}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1,\dots,X_n)\in E^n$. Alors

$$\det_{\mathscr{E}'}(X_1,\dots,X_n)=\det_{\mathscr{E}'}(e_1,\dots,e_n)\times\det_{\mathscr{E}}(X_1,\dots,X_n) \qquad (*)$$

c'est-à-dire

$$\det_{\mathscr{E}'}=\det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E})\times\det_{\mathscr{E}}$$

Démonstration

Théorème - Caractérisation des bases
Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B}=(X_1,\dots,X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})\neq 0$$

Démonstration

Pour aller plus loin - Valeur numérique du déterminant
Il est dommage de réduire l'intérêt du déterminant : sa valeur exacte est une information plus importante (et plus précise) que celui de savoir s'il est nul ou non.
En dimension 2, $\det_{\mathscr{E}}(\vec{u},\vec{v})$ *donne la valeur du double de l'aire du triangle de côté* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*. On retrouve bien que le déterminant est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.*
En dimension 3, il s'agit de la valeur (orientée) du volume élémentaire porté par les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$*.*
De manière générale, le déterminant $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})$ *indique la valeur du « n-volume » élémentaire définie par les vecteurs de* $\mathscr{B}$ *dans* $\mathscr{E}$*.*
Cela donne un sens à l'inégalité d'Hadamard :

$$\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B})\leqslant\prod_{u\in\mathscr{B}}\|u\|_{2,E}$$

Définition - Orientation d'un espace
Soit $\mathscr{B}_0$ une base donnée de E et $\mathscr{B}$ une autre base. On sait que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})\neq 0$.
Les bases de E se classent donc en deux ensembles : celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})>0$ et celles telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})<0$.
On oriente donc E en choisissant une base $\mathscr{B}_0$ de référence qui sera dite

Pour aller plus loin - Avoir même orientation
Il s'agit d'une relation d'équivalence, qui partitionne l'ensemble des bases en deux familles disjointes : les bases directes et les bases indirectes

directe,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$ sont dites directes,
les bases $\mathscr{B}$ telles que $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$ sont dites indirectes.

3.2. Déterminant d'un endomorphisme

Définition - Déterminant d'un endomorphisme
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n) \qquad (**)$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base

Démonstration

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$.

Démonstration

Proposition - Premiers résultats
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. Alors
- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$
- Si $u \in GL(E)$ alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$

Démonstration

Attention - Non linéarité
$\det(u+v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.
Contre-exemple à avoir en tête :
$\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1+1$ pour $n \geqslant 2$.

Remarque - Morphisme de groupes
L'application

$$\det : \begin{array}{ll} (GL(E), \circ) & \to (\mathbb{K}^*, \times) \\ u & \mapsto \det u \end{array}$$

est un morphisme de groupe ; c'est ce que signifie la dernière propriété.
Exercice
Montrer que $\mathscr{S}\mathscr{L}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid \det(u) = 1\}$ est un groupe.
On l'appelle le groupe spécial linéaire.

3.3. Déterminant d'une matrice

Définition - Déterminant d'une matrice
Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$).
On pose alors

$$\det A = \det_{\mathscr{E}}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}, \text{ noté } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n=2$ ou $n=3$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{array}$$

(règle de Sarrus).

Théorème - Commutativité de det **et de** $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathcal{E}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{E})$. Alors
$$\det u = \det A.$$

Démonstration

Pour aller plus loin - Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$
$GL_n(\mathbb{K})$, groupe des matrices inversibles admet comme sous-groupe, le groupe spécial linéaire.
Il s'agit de l'ensemble des matrices de déterminant égal à 1.
$$SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$$
On rappelle qu'une matrice de transvection est de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ (avec $i \neq j$).
On montre alors que
- *$\forall\ i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K})$.*
- *Mieux : $\{T_{i,j}(\lambda)\}$ engendre le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ (on exploite au mieux l'algorithme du pivot de Gauss)*
- *Toute matrice M est de la forme $M = (I_n + (\det M - 1)E_{n,n}) \times S$, avec $S \in SL_n(\mathbb{K})$*

Proposition - Premières propriétés
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^tA) = \det A$

Démonstration

Corollaire - Déterminant en lignes
Si $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes de A, alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e. $\det A = \det({}^tL_1, \dots, {}^tL_n)$.

Démonstration

3.4. Conséquences pratiques pour le calcul des déterminants

Savoir faire - Liste des bonnes habitudes

1. On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp.lignes).
2. Le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun des vecteurs colonnes (resp. lignes).
3. Si on effectue une permutation σ sur les vecteurs colonnes (resp. lignes) le déterminant est multipliés par $\epsilon(\sigma)$ (par -1 dans le cas d'un échange de deux colonnes ou deux lignes)
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.

Exemple - Opération sur les colonnes

Exemple - Dépendance linéaire

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales :

Démonstration

Exercice

Avec les règles précédentes, montrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

4. Calculs et applications des déterminants

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

Proposition - Formule de Cramer
Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[X]_i = \dfrac{\det\left(C_1(A) \cdots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A) \cdots C_n(A)\right)}{\det A}$

Histoire - Redécouverte

C'est le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) qui remit au goût du jour la notion de déterminant. Les découvertes de Leibniz ayant été (dans un premier temps) oubliées. Ainsi les formules de Cramer (voir plus bas) sont en fait des formules de Leibniz. On doit également à Cramer la définition de la signature d'une permutation.

Démonstration

4.2. Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration

Remarque - Transposé
En transposant le résultat précédent, on a donc également : $\det \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} = \det A \det B$.

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d'une matrice triangulaire
Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

Démonstration

Définition - Mineur et cofacteur
On appelle mineur d'indice (i, j) de A le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On appelle cofacteur d'indice (i, j) le produit du mineur d'indice (i, j) par $(-1)^{i+j}$.

Théorème - Calcul du déterminant par développement
Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i, j) dans la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i,k} \quad \text{développement suivant la k-ième colonne}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{k,j} \quad \text{développement suivant la k-ième ligne}$$

Démonstration

Exercice

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant d'ordre n avec des 1 sur la diagonale, juste au-dessus et juste en-dessous, des 0 autre part).

Déterminer une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}, en déduire D_n.

4.4. Calcul de l'inverse

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j,k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\delta_{j,k}\det A$$

$$\forall i,k\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\delta_{i,k}\det A$$

Démonstration

Définition - Comatrice
La matrice $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\text{Com}A$.

Théorème - Expression de A^{-1} avec la compatrice
$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A\times {}^t\text{Com}A={}^t\text{Com}A\times A=(\det A)I_n$.
Donc, si $\det A\neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,{}^t\text{Com}A$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Inverser un système. Formule de Cramer (autre démonstration)
Supposons que l'on doit résoudre le système d'inconnue X : $AX=B$.
Il s'agit donc de calculer

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\det(A)}{}^t\text{Com}A\times B$$

On a donc

$$x_i=\frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^{n}Coef_{i,j}({}^t\text{Com}(A))B_j$$
$$=\frac{1}{\det(A)}\sum_{j=1}^{n}A_{j,i}B_j$$

Or ce dernier calcul est le développement par rapport à la colonne i de la matrice A_i^B, obtenu à partir de la matrice A pour laquelle la i^e colonne a été remplacée par la colonne B

Exercice

Soit $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ telle que $\det(A)\neq 0$. Déterminer A^{-1}.

Savoir faire - Utilisation de A^{-1} avec la comatrice

Mis à part pour $n=2$, on n'utilise **pas** cette formule pour calculer A^{-1} car les calculs sont trop longs. Quelle est leur complexité ?
$n! \times n$ pour δ et $(n-1)! \times (n-1)$ pour chacun des n^2 coefficients.
Donc au total : $n!n + n^2(n-1)(n-1)! = nn!(1+(n-1)) = n^2 n! \dots$

4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Pour aller plus loin - Polynôme caractéristique d'une matrice
Considère le nombre $\chi(x) = \det(xI_n - A)$.
Alors comme $xI_n - A$ est une matrice avec quelques x comme coefficients, son déterminant est une formule polynomiale en x.
On note χ_A ce polynôme. On montre qu'il est unitaire, de degré n. Il porte quasiment toutes les informations concernant A (mais pas les invariants de similitude...)

Savoir faire - Si il y a x comme coefficient(s) de A

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,\sigma(i)}(A)$.
Si x^k se glisse parmi les coefficients de A_x, alors $\det A_x$ est nécessairement une fonction polynomiale en x.
On peut alors :

1. chercher son degré (d), en organisant bien notre réflexion
2. trouver des valeurs particulières pour des valeurs de x particulières et en nombre suffisant ($\geqslant d$) pour en déduire une expression directe et explicite du déterminant.

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde
On note $A(x_1, x_2, .., x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, .., x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Démonstration

Histoire - Vandermonde
Alexandre-Théophile Vandermonde est né le 28 février 1735 à Paris et est mort le 1er janvier 1796 à Paris. Il est un mathématicien et chimiste français

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde
$A(x_1, x_2, .., x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exercice
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.
On note $e_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}$.
Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots e_k)$ est libre si et seulement si $\forall\ i \neq j \leqslant n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$

5. Bilan

Synthèse

- L'ensemble des fonctions n-linéaires, alternées de E^n ($\mathbb{K}$ ev) et à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
  Il est de dimension 1. Toutes ces fonctions sont donc colinéaires, ou proportionnelles à une expression référante (base) : l'application déterminant.
- Cette application de base s'appelle le déterminant de la famille des n vecteurs.
  Par extension, on peut aussi définir le déterminant d'une matrice (n vecteurs-colonnes de taille n) ou bien d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ (par indépendance de cette valeur, selon la base considérée).
- On a alors toute une famille de résultats dont deux résultats essentiels : $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$ (ou équivalent pour les matrices) et $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$. Les autres résultats sont plus évident ($\det A = \det A^T \dots$).
- Une méthode est souvent exploitée : le développement par rapport à une ligne ou une colonne. Ceci au niveau théorique (on en déduit par exemple : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{com}(A))^T$) ou au niveau pratique (Formules de Cramer, relation de récurrence...).
  On notera également que le déterminant peut être vu comme un polynôme supersymétrique de ces coefficients...

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n = 2$ ou $n = 3$
— Savoir-faire - Liste des bonnes habitudes
— Savoir-faire - Utilisation de A^{-1} avec la comatrice
— Savoir-faire - Si il y a x comme coefficient(s) de A

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\det_E(X_1,\dots X_n)$	Déterminant de $(X_1,\dots X_n)$ par rapport à la base E	$\det_E(X_1,\dots X_n)=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[X]_{i,\sigma(i)}$	où $\forall\ j\in\mathbb{N}_n,\ X_j=\sum_{i=1}^{n}[X]_{i,j}E_i$.
$\det(A)$	Déterminant de $A(\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$	$\det A=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}{}^{\sigma(i)}[A]_i$	.
$A_{i,j}$	Cofacteur d'ordre (i,j) de A	$A_{i,j}=(-1)^{i+j}\det(A^{i\wedge j})$	où $A^{i\wedge j}$ est la matrice obtenue à partir de A privée de la ligne i et colonne j.
$\mathrm{com}A$	Comatrice de A : $\forall\ i,j\in\mathbb{N}_n,\ {}^i[\mathrm{com}A]_j=A_{i,j}$ (cofacteur)	$A\times(\mathrm{com}A)^T=I_n$.	
$V(x_1,x_2,\dots x_n)$	Déterminant de la matrice de VANDERMONDE $\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\x_1&\cdots&x_n\\\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{pmatrix}$	$V(x_1,\dots x_n)=\prod_{i<j}(x_j-x_i)$	

Retour sur les problèmes

147. C'est la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne. Elle donne la formule $\det_n(A)=\sum_i {}^1[A]_i\times\det_{n-1}(A^{1\wedge i})$.

     Elle se comprend très bien pour des matrices triangulaires supérieures.
148. Cours
149. On voit qu'il y a un agrandissement global de A vers A' d'un facteur 10.
     La formule du déterminant précise que celui-ci peut être concentré sur une seule colonne (ou ligne) : $C_i(A')=10C_i(A)$ et $\forall\ j\neq i,\ C_j(A')=C_j(A)$ ou bien dilué sur toutes les colonnes (ou lignes) : $C_k({}^a\prime)=\sqrt[n]{10}\times C_k(A)$.
150. Cours : nécessairement $\det(AB)=\det A\det B$.
151. Cours : c'est la formule de Cramer ou bien l'inverse d'une matrice