


**Neuvième partie**

**Probabilités**



# Probabilités sur un univers fini

 **Résumé -**

Depuis quelques siècles, les mathématiciens se proposent "d'éclairer de leurs lumières" les problèmes liés à des événements aléatoires, dus au hasard. Pour ce faire ils ont développé un type de calcul : le calcul de probabilité.

On associe au mot hasard une racine arabe : az-zahr qui signifie le dé. Il est apparu en français pour signifier tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un événement non prévisible et par extension le mode d'apparition de ce type d'événement.

L'objet de la théorie mathématique des probabilités est l'analyse mathématique puis la synthèse calculatoire des phénomènes dans lesquels le hasard intervient, semble-t-il...

Dans ce premier chapitre, nous posons de manière satisfaisante la modélisation acceptable de toute expérience aléatoire : il s'agit d'abord de définir un espace de probabilité. Une fois cela fait, nous reprenons une notion très importante du cours de l'année dernière : le conditionnement en probabilités (et la notion d'événements indépendants qui en découle).

**Sommaire**

---

<b>1. Problème</b>	<b>714</b>
<b>2. Vocabulaire des expériences aléatoires</b>	<b>715</b>
2.1. Modélisation en probabilité	715
2.2. Expérience aléatoire	715
2.3. Événements	716
<b>3. Espaces probabilisés finis</b>	<b>717</b>
3.1. Définitions	717
3.2. Propriétés	718
3.3. Suite (dé)croissante d'événements	720
3.4. Exemples de probabilité	721
3.5. Loi uniforme et simulation avec Python	723
<b>4. Conditionnement et indépendance</b>	<b>724</b>
4.1. Conditionnement	724
4.2. Indépendance en probabilité	730
<b>5. Bilan</b>	<b>732</b>

---

## 1. Problème

### ? Problème 152 - Structure mathématique

Le hasard (ou les phénomènes contingent) peuvent-ils s'interpréter au mieux avec une modélisation mathématique?

Les probabilités peuvent-elles se mesurer, se calculer (s'additionner...)?

De quel objet mathématiques sont-elles tout proche?

Et les événements associés, quelle est la structure de l'ensemble des événements? De quel objet mathématiques sont-ils tout proche?

### ? Problème 153 - Quelle définition pour la probabilité d'un événement

Pendant quelques siècles, les mathématiciens comprenaient les probabilités de deux façons :

- les fréquentalistes : la probabilité d'un événement est égal à la proportion de réalisation de cet événement lorsqu'on réalise un grand nombre de fois cette expérience.
- les subjectivistes : la probabilité d'un événement se calcul à partir des symétries du problèmes et de raisonnements subjectifs a priori.

Aujourd'hui, en mathématiques, le débat est tranché. Comment?

Si les deux approches ont co-existé c'est qu'il y a certainement un lien assez profond entre les deux. Lequel et sous quelle forme mathématique?

### ? Problème 154 - Informatique

Peut-on simuler informatiquement le hasard ou un pseudo-hasard qui y ressemble beaucoup?

Si oui, comment ces simulations peuvent nous aider à mieux comprendre les lois de probabilités et à vérifier les calculs effectués (qui sont souvent des calculs sur des « grands nombres »)?

### ? Problème 155 - Incompatibilité des événements

Des événements qui ne peuvent se réaliser en même temps sont dits incompatibles.

Que peut-on dire de leur probabilité de réalisation?

### ? Problème 156 - Indépendance des événements

Et des événements indépendants? Qu'est-ce que cela veut dire?

La définition de l'indépendance d'événements est-elle d'abord mathématique ou phénoménologique?

### ? Problème 157 - Deux événements en relation

Si l'on sait que deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont dépendant mutuellement l'un de l'autre, il est possible de trouver une relation entre ces deux dépendances  $E_1 \Rightarrow E_2$  et  $E_2 \Rightarrow E_1$ , en fonction de  $E_1$  et  $E_2$ . On peut donc passer d'un calcul d'une probabilité à l'autre.

Si on ajoute une temporalité entre les deux, cela donne une formule pour remonter le temps : la formule de Bayes. Que nous apprend-elle?

Concrètement : Si un test médical donne avec 99% le bon diagnostic et qu'il m'annonce que je suis malade. Quelle est la probabilité que je sois véritablement malade? (Ai-je toutes les informations?)

## 2. Vocabulaire des expériences aléatoires

### ↗ Heuristique - Sur quelques définitions...

Dans cette partie, nous commençons par quelques définitions qui ne sont pas très « mathématiques ». Elles donnent plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations.

### 2.1. Modélisation en probabilité

Le "modèle" est un concept clé en mathématiques de l'aléatoire et de manière générale en science même si ce concept a mis du temps à se dégager. On rappelle néanmoins :

#### Définition - Modèle mathématique

Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel ou d'une description de la réalité.

### ↗ Heuristique - Modélisation en probabilité

Pour obtenir un modèle pseudo-concret associé à une situation réelle, il est d'abord nécessaire (**sans quoi, on ne peut pas faire grand chose**) de recenser toutes les résultats possibles de l'expérience que l'on observe → *définition de l'univers*.

L'étape supplémentaire consiste donc à **associer (si possible) à chacune des situations possibles un nombre qui mesure la possibilité de réalisation** → *définition de la tribu d'événements sur l'univers*.

Ces nombres (il y a plusieurs situations possibles) sont associés en une **fonction** de probabilité, elle prend ces valeurs dans un ensemble  $\mathcal{A}$  qui peut être celui des sous ensembles de  $\Omega$ . Pour comprendre les propriétés essentielles vérifiées par  $\mathcal{A}$ , il faut voir celles que l'on souhaite associer à  $\mathbf{P}$ . → *définition (enfin) de la probabilité*.

### 2.2. Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très « mathématique ». C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

#### Définition - Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du **hasard** :

- lancer de dé, tirage d'une carte, jeu de pile ou face,
- observation du nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une durée fixée,
- observation de la durée de vie d'un individu anonyme d'une population, tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1...

A une telle expérience on associe l'ensemble de tous les résultats observables, noté  $\Omega$  et appelé **univers** (ou univers des possibles).

---

 Exemple - Univers possible

### 2.3. Événements

#### Comparaison événements/ensembles

**Définition - Issue et événement aléatoire**

Un élément de  $\Omega$  est usuellement noté  $\omega$  et appelé **issue**.

Un **événement aléatoire**  $A$  est représenté par l'ensemble des résultats  $\omega$  qui le réalisent. C'est donc une partie de  $\Omega$ . On a donc  $\omega \in A$  et  $A \subset \Omega$ .

Le singleton  $\{\omega\}$  est appelé événement élémentaire.

 Exemple - « Tirer » au hasard

**Définition - Vocabulaire probabiliste**

On utilise le vocabulaire probabiliste suivant pour les événements :

notation	terminologie probabiliste
$\emptyset$	<b>événement impossible</b>
$\Omega$	<b>événement certain</b>
$\bar{A}$	<b>événement contraire</b> de $A$
singleton $\{\omega\}$	<b>événement élémentaire</b>
$A \cup B$	<b>événement <math>A</math> ou <math>B</math></b>
$A \cap B$	<b>événement <math>A</math> et <math>B</math></b>
$A \cap B = \emptyset$	$A$ et $B$ sont <b>incompatibles</b>
$A \subset B$	$A$ <b>implique</b> $B$

**Système complet d'événements - Partition de  $\Omega$** **Définition - Système complet d'événements**

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements deux à deux incompatibles, tels que  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ .

Dans le cas où  $\Omega$  est fini, un système complet d'événement est une famille finie  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  d'événements deux à deux incompatibles tels que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ .

**Exemple - Trivial****Remarque - Partition**

Si l'on impose que tous les événements soient non vides, alors un système complet d'événements est une partition finie ou dénombrable de  $\Omega$ .

**3. Espaces probabilisés finis**

On considère désormais uniquement le cas où  $\Omega$  est un ensemble fini.

**3.1. Définitions****Définition - Probabilité sur un univers fini**

Soit  $\Omega$  un univers fini.

On appelle **probabilité** sur  $\Omega$  toute application  $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que

- (i)  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- (ii) Pour tout couple  $(A, B)$  d'événements incompatibles,  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

**Pour aller plus loin - Espace probabilisé fini/espace probabilisable/espace de probabilité**

*Il ne s'agit pas de la définition généralement admise d'un espace de probabilisé (ou de probabilité).*

*Dans le cas non fini, il faut également ajouter une tribu de  $\Omega$ .*

*Une tribu  $\tau$  de  $\Omega$  est un ensemble de parties de  $\Omega$  contenant la partie vide, stable par réunion (et intersection) dénombrable et par passage au complémentaire.*

*La mesure de probabilité  $\mathbf{P}$  est alors définie sur  $\tau$ .*

*Finally, dans le cas fini, on prend par principe  $\tau = \mathcal{P}(\Omega)$  et on n'en parle plus...*

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple  $(\Omega, \mathbf{P})$  où  $\mathbf{P}$  est une probabilité sur un univers fini  $\Omega$ .

### ⚠ Attention - Addition et réunion

- ⚡ Notons bien que l'on réunit les événements (et **on ne les additionne pas**)
- ⚡ En revanche, on additionne les probabilités des événements (incompatibles) (et **on ne les réunit pas**)

### Définition - Événements négligeable, presque sûr

Un événement  $A$  est dit **négligeable** si  $\mathbf{P}(A) = 0$ .

Un événement  $A$  est dit **presque sûr** (p.s.) si  $\mathbf{P}(A) = 1$ .

Une propriété  $\mathcal{P}$  est dite **presque sûre** (ou **vraie presque sûrement**) si la probabilité qu'elle se réalise vaut 1.

### 🔍 Pour aller plus loin - Cas discret

La démonstration reste identique dans le cas de  $\Omega$  non fini mais dénombrable comme on le voit en seconde année.

Le résultat reste vrai dans des cadre plus large encore...

### 🔧 Savoir faire - Une bonne habitude à prendre de suite

Lorsque l'on écrit  $\mathbf{P}(A)$ , surtout on ne *dit* pas «  $\mathbf{P}$  de  $A$  » mais bien « la probabilité de l'événement  $A$  » ou beaucoup mieux : « la probabilité que l'on ait obtenu un  $a$  ».

On notera en effet : qu'il y a toujours un verbe dans une proposition relative dans ce cas là et donc qu'il manque un verbe dans la proposition principale. La dernière expression proposée invite naturellement à dire ensuite « vaut » ou « est égale à » ; ce que n'invite pas à faire «  $\mathbf{P}$  de  $A$  »

## 3.2. Propriétés

### Proposition - Premières propriétés

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace probabilisé fini. Alors

1.  $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
2.  $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
3.  $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
4.  $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B) \text{ et } \mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A))$
5. Si  $A_1, \dots, A_n$  sont  $n$  événements deux à deux incompatibles alors  $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$ .
6. Si  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements alors  $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) = 1$ .
7. Plus généralement si  $A_1, \dots, A_n$  sont  $n$  événements alors  $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)$ .

### 🛑 Remarque - Précision pour 4.

Si  $A \not\subset B$ , on n'a pas  $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ .

### Démonstration

### 🔍 Pour aller plus loin - Crible de Poincaré

Comme en dénombrement, on a une formule plus général dans le cas des événements non disjoints :

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

**Proposition - Détermination d'une probabilité**

Soit  $\Omega$  un univers fini. Tout événement  $A$  est fini et est donc la réunion finie des événements élémentaires le constituant, par conséquent :

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$$

Si  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  alors l'application  $\tilde{\mathbf{P}} : \Omega \rightarrow [0, 1], \omega_i \mapsto p_i$  définit une probabilité  $\mathbf{P} : A \mapsto \sum_{\omega \in A} \tilde{\mathbf{P}}(\omega)$  sur  $\Omega$

si et seulement si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

**Démonstration**

### 3.3. Suite (dé)croissante d'événements

Ici, on souligne quelques manipulations ordinaires chez les probabilistes :

#### Événements/Ensemble

##### Proposition - Réunion/intersection d'événements

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements.

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \omega \in A_i\} = [\forall i \in I, \omega \in A_i]$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \omega \in A_i\} = [\exists i \in I, \omega \in A_i]$$


On remplace parfois des « il existe » par des « réunions » (et parfois, on agit dans l'autre sens).

#### (Dé)Croissance

##### Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements,

si pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A_i \subset A_{i+1}$  ou  $A_i \supset A_{i+1}$  (resp.  $A_{i+1} \subset A_i$ ,  $A_{i+1} \supset A_i$ ).

 **Exemple** -  $E_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $F_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$

##### Pour aller plus loin - Théorème de la limite croissante (P)

Si  $(A_n)$  est une suite croissante d'événements.

Notons  $A = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \in A_n\}$ .

Nécessairement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset A$ .

En fait, on a  $A = \lim(A_n)$ . On écrira :  $\mathbf{P}(A) = \lim \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\lim(A_n))$ , avec interversion!

Ce sera le théorème de la limite croissante pour les probabilités. Il existe le théorème de limite décroissante.

##### Savoir faire - Suite croissante d'événements et convergence

Si  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$   $\nearrow$ , alors on note  $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$ .

Et,  $A_{i+1} = A_i \cup B_i$ , réunion disjointe, donc  $\mathbf{P}(A_{i+1}) = \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_i)$ .

Et ainsi :  $\mathbf{P}(B_i) = \mathbf{P}(A_{i+1}) - \mathbf{P}(A_i)$  et par télescopage :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}(B_i) = \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_0)$$

On passe alors à la « limite monotone ».

De même, pour  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \searrow$ , avec  $C_i = A_i \setminus A_{i+1}$  :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}(C_i) = \mathbf{P}(A_0) - \mathbf{P}(A_n)$$

### 3.4. Exemples de probabilité

#### Définition - Probabilité uniforme sur un univers fini

On appelle **probabilité uniforme** sur  $\Omega$ , univers fini, la probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables.

Nécessairement

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \text{ et } \mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{« nb de cas favorables »}}{\text{« nb total de cas »}}$$

on dit aussi qu'on est sous **hypothèse d'équiprobabilité**.

#### ◆ Pour aller plus loin - Convergence de variables aléatoires

Nous verrons plus loin (au chapitre suivant) comment exploiter ces résultats pour étudier la convergence de suites d'événements, de variables aléatoires plus précisément.

#### ⚠ Attention - D'autres probabilités

On peut, bien évidemment définir d'autres probabilités que la probabilité uniforme sur un univers fini.

#### Exercice

On lance trois dés honnêtes. Calculer :

1. la probabilité d'obtenir au moins un as.
2. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.
3. la probabilité que la somme des chiffres soit paire.
4. la probabilité que la somme des chiffres obtenus soit paire et que l'on ait au moins deux faces identiques.

#### 🍃 Exemple - Probabilité non uniforme

#### ◆ Pour aller plus loin - Avec variables aléatoires

Nous verrons lorsque nous aurons défini les variables aléatoires que la meilleure façon (=plus naturelle) de présenter cette situation est d'exploiter les variables aléatoires.

On note  $X_k$ , le résultat du dé  $k$ .  $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 6])$ .

Et ici, on s'intéresse à  $S = X_1 + X_2$ .

On trouve alors  $S(\Omega) = [2, 12]$  et  $\mathbf{P}(S = h) =$

$$\sum_{i=1}^{h-1} \mathbf{P}(X_1 = i) \mathbf{P}(X_2 = h - i).$$

On peut effectuer ce(s) calcul(s)... ou bien penser que cela ressemble au produit de Cauchy et donc considérer le polynôme  $P_S = P_{X_1} \times P_{X_2}$ , ou  $[P_Y]_k = \mathbf{P}(Y = k)$ .

Exercice

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Définir une probabilité sur  $\Omega$  telle que le 6 ait une chance sur deux de sortir (exemple de dé pipé...avec un peu de plomb d'un côté, ça doit pouvoir se faire !)

 **Application - Jeu de « Passe-Dix »**

**Savoir faire - Exercice de probabilités (1). Choix du modèle**

Dans ces premiers exercices de probabilité, il faut avec précision définir le modèle étudié

1. la définition de  $\Omega$  est très importante. Il faut coller au plus près de la réalisation de l'expérience;  $\Omega$  est l'ensemble des réalisations possibles. Vous pouvez commencer par vous demander quelle est la meilleure façon de décrire ces solutions.

*Comment décrire une solution? Cette description permet-elle de décrire toutes les solutions, et réussit-elle à faire la différence entre deux solutions différentes?*

2. en ce qui concerne la tribu, il s'agit souvent de prendre  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
3. en ce qui concerne le choix de la probabilité, dans cette première catégorie d'exercices, il s'agira souvent de prendre la probabilité uniforme.

*On peut penser à l'exercice du lancer de deux dés...*

**Exercice**

Le chevalier de Méré (personnage historique de la cour de Louis XIV) avance deux règles :

- « il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six en lançant un dé quatre fois de suite »
- « il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double-six en lançant deux dés vingt-quatre fois de suite »

Que pensez-vous de ces règles ?

**3.5. Loi uniforme et simulation avec Python**

Avec Python, la seule mesure de probabilité définie sur un ensemble fini est la mesure uniforme.

**📌 Informatique - Rappel des commandes en python**

Il faut importer la bibliothèque `random`. Puis la commande `randint(1, n)` tire « au hasard », en suivant une loi uniforme, un nombre entre 1 et  $n$ .

Parfois on a besoin de `random` qui tire un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Voyons le programme du tirage de deux dés.

**📌 Informatique - Simulation du lancer de dés**

```
def deux-dés:
    """ résultat du lancer de 2 dés """
    a:=randint(1,6)+randint(1,6)
    return(a)
```

**⚠ Attention - Quelle différence?**

🌀 Comparer les deux commandes suivantes :


```
a:=randint(1,6)+randint(1,6) et a:=2*randint(1,6)
```

🌀 Le second tire un seul nombre entre 1 et 6 et le multiplie par deux.

🌀 Ainsi, on simule ici un tirage uniforme dont les résultats possibles sont

🌀 2, 4, 6, 8, 10 et 12.

**🔍 Analyse - Etude et résultat du programme**

 **Remarque - Différence entre résultat fréquentielle et probabilité a priori**

On remarque la différence entre la modélisation, le résultat exact d'une expérience et la limite lorsque l'on réalise une infinité de simulations.

**Exercice**

Programmer en Python deux programmes pour simuler les jeux du chevalier de Méré.  
Effectuer 20 simulations de 1000 parties de chacun des jeux.  
Que pensez-vous du résultat ?

## 4. Conditionnement et indépendance

### 4.1. Conditionnement

#### Probabilité conditionnelle

 **Heuristique - Principe du conditionnement**

Le but de ce paragraphe est d'expliquer comment tenir compte d'informations déjà connues, mais également de voir comment retrouver des résultats relatifs au "passé".

Par exemple, si on lance deux dés parfaits et que l'on note :

$A$  : « la somme des points obtenus est au moins égale à 10 »,

$B$  : « le premier dé amène un 3 »,

$C$  : « le premier dé amène un 6 ».

Une fois le premier lancer effectué, si  $B$  est réalisé, on a des informations sur la réalisation de  $A$ ... mais également si  $C$  est réalisé.

De même, une tierce personne arrivant après l'expérience, à laquelle on dit avoir obtenu une somme égale à 11 peut dire si  $B$  a été réalisé.

**Définition - Probabilité conditionnelle sachant l'événement  $A$**

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace probabilisé fini et  $B$  un événement de probabilité non nulle. Soit  $A$  un événement quelconque.

On appelle **probabilité de  $A$  sachant  $B$**  le nombre  $\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ , également noté  $\mathbf{P}(A|B)$ .

Alors l'application  $\mathbf{P}_B$  est bien une probabilité définie sur  $\Omega$ .

On a donc  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(B)$ , valable même si  $\mathbf{P}(A) = 0$ .

Avec cette définition, il y a un résultat à démontrer : il s'agit bien d'une probabilité

**Démonstration**

 **Remarque - Du sens de cette formule**

L'application  $\mathbf{P}_B$  est bien une probabilité.

Mais pourquoi l'appeler « probabilité conditionnelle à l'événement  $B$  » ou encore « probabilité sachant  $B$  » ?

Si l'on sait que  $B$  s'est réalisé, on peut imaginer que l'univers est passé de  $\Omega$  à  $B$ , par cette information.

En outre, la réalisation de  $A$  correspond alors au cas de réalisation de  $A$  et de  $B$ .

En terme de cardinal (cas fini), on cherche :

$$\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}}{\frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}} = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}_B(A)$$

C'est un peu comme une projection de  $\Omega$  sur  $B$ .

#### Exercice

Considérons une famille dont nous savons qu'elle a deux enfants et supposons que les quatre répartitions possibles, dans l'ordre de naissance,  $FF, FG, GF, GG$  sont équiprobables.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que le cadet est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?
3. Quelle est la probabilité qu'Etienne soit l'aîné de sa fratrie ?

#### Remarque - Utilisation fréquente

Si  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , on a

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}_B(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$$

On reviendra sur cette relation plus bas (formule de Bayes).

#### Attention - Grosse faute, classique

Il est très important de bien faire la différence entre  $\mathbf{P}(A \cap B)$  et  $\mathbf{P}_A(B)$ .

- $\mathbf{P}(A \cap B)$  est la probabilité d'avoir  $A$  et  $B$  (partant de rien de réalisé).
- $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A)$  est la probabilité d'avoir  $B$ , sachant que  $A$  est réalisé

#### Savoir faire - Suivre un certain formalisme

Dans ce genre d'exercice, la démarche est toujours identique :

1. Présenter les événements importants.  
Ne pas en donner une liste trop grande (on exploitera les notations de complémentaires).  
On fera attention à donner des noms significatifs à ces événements.
2. Exprimer la(les) relation(s) vérifiées par les probabilités connues et à trouver
3. Présenter le modèle « naturelle » donnant les probabilités des événements selon l'énoncé (probabilité uniforme bien choisie, justifiée mais sans excès)

Insistons, il s'agit bien de définir des événements  $A_1$  et pas des probabilités  $p_1$ . On cherche alors  $\mathbf{P}(A_1)$ ...

#### Exercice

Soient  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  deux urnes contenant chacune 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne  $\mathcal{U}_1$ , on note sa couleur et on la met dans  $\mathcal{U}_2$ . On tire alors au hasard une boule de  $\mathcal{U}_2$ . Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule noire ?

#### Formule des probabilités composées

**Proposition - Formule des probabilités composées**

Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'événements tels que  $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$  alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

**◆ Pour aller plus loin - Moins loin**

C'est la fameuse multiplication des branches du lycée

**Démonstration**Exercice

Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir, dans cet ordre, deux blanches puis une noire ?

Exercice

Une urne contient 10 boules blanches et 10 boules noires.

On effectue une suite de tirage de boules de l'urne, on note sa couleur, puis :

- on l'a remet si elle est noire
- on la garde si elle est blanche

Calculer la probabilité  $p_n$  qu'au cours des  $n$  premiers tirages, on est retiré une et une seule boule blanche.

Quelle est la limite de  $p_n$  ? Donner un équivalent de  $(p_n)$ .

**Formule des probabilités totales****Proposition - Formule des probabilités totales**

Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  un système complet d'événements, tous de probabilité non

nulle. Alors, pour tout événement  $B$  on a

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}_{A_i}(B)$$

En particulier si  $\mathbf{P}(A) \neq 0, 1$ ,  $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}(\bar{A}) \mathbf{P}_{\bar{A}}(B)$ .

### Démonstration

### Exercice

Soit  $n$  un entier non nul. Une urne  $\mathcal{U}$  contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ...,  $n$  jetons numérotés  $n$ . On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$ ; l'urne  $i$  contient  $i$  boules blanches et  $n - i$  noires. On tire un jeton dans  $\mathcal{U}$ , s'il est numéroté  $i$ , on prélève une boule dans l'urne  $i$ .

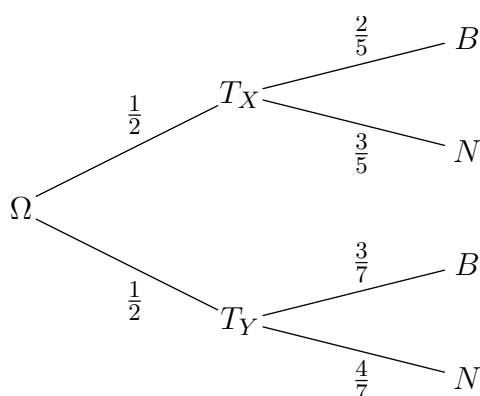
Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

### ⚠ Attention - Ne pas oublier...

⚡ ... de préciser (et de démontrer, si nécessaire) que nous sommes en présence d'un système complet d'événements

### 🔧 Savoir faire - Botanique (1)

L'exercice nous montre que cette formule s'applique à **chaque fois que des événements sont liés**. C'est à dire à chaque fois que vous avez envie de faire un arbre...



La somme des probabilités de chaque branche, partant d'une même racine vaut 1.

Le nombre figurant sur chaque branche correspond à la probabilité de l'événement situé à droite de la branche, sachant l'événement situé à

gauche.

Attention à ne pas sommer abusivement les probabilités associées aux branches de l'arbre.

### Formule de Bayes

#### Proposition - Formules de Bayes

Soit  $B$ , événement de probabilité non nulle.

1. Si  $A$  est un événement de probabilité non nulle, alors

$$\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}_A(B)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}$$

2. Si  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, pour tout  $j$  on a

$$\mathbf{P}_B(A_j) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}_{A_i}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_j)\mathbf{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}$$

### Démonstration

#### Savoir faire - Botanique (2)

L'exercice nous montre que cette formule s'applique à chaque fois que vous avez envie de faire un arbre... et que la question posée remonte la chronologie naturelle de l'arbre.

Il s'agit de calculer la probabilité d'un premier événement, sachant que c'est le deuxième qui est en fait réalisé...

#### Exemple - QCM

Exercice

Un taxi est impliqué dans un carambolage de nuit. Deux compagnies de taxi, les Rouges et les Bleus, opèrent en ville. Nous savons que 85% des taxis en ville sont Rouge et 15% sont Bleus.

1. Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit un Bleu ?

Quelques heures plus tard nous apprenons qu'un témoin a identifié le taxi responsable comme Bleu. Le tribunal a testé la fiabilité des témoignages dans ce type de circonstances (accident de nuit) et en a conclu que les témoins identifient correctement les couleurs avec une probabilité  $p$  et se trompent avec une probabilité  $1 - p$ .

Nous définissons les événements :

- $B$  est l'événement : "Le taxi est bleu", son complémentaire est  $R$ .
- $TB$  est l'événement : "Le témoignage a affirmé que le taxi est bleu", son complémentaire est  $TR$ .

2. Quelle est la probabilité pour que le taxi impliqué dans l'accident soit un Bleu ?

On étudiera les situations :  $p = 0$ ,  $p = 1$  et  $p = 0,8$  et on pourra tracer  $\mathbf{P}_{TB}(B)$  en fonction de  $p$ .

3. Que se passe-t-il si  $n$  témoins indépendants affirment qu'il s'agit d'un taxi bleu ?

Exercice

Une usine possède trois ateliers de production de poupées :  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

L'atelier  $A$  est responsable de 60% de la production de poupées de l'usine,  $B$  de 25% et  $C$  de 15%.

Le technicien qualité de l'entreprise estime que

- A la sortie de  $A$ , il y a 1 poupée barbue sur 1000.
- A la sortie de  $B$ , il y a 50 poupées barbues sur 1000.
- A la sortie de  $C$ , il y a 10 poupées barbues sur 1000.

1. Calculer la probabilité qu'une poupée prise au hasard dans les stocks de l'usine soit barbue ?
2. Manque de bol !, le technicien qualité est tombé sur une poupée barbue. Calculer la probabilité que celle-ci soit issue de l'usine  $A$ . De même pour l'usine  $B$ . De même pour l'usine  $C$ .

**⚠ Attention -  $\mathbf{P}_a(\text{barbe})$**

Notons que dans cet exercice (et dans la plupart), ce qui nous intéresse en réalité c'est d'exploiter cette formule des probabilités totales. Et dans ces cas, la probabilité conditionnelle ne s'obtient pas par un calcul forcé du genre  $\mathbf{P}_a(\text{barbe}) = \frac{\mathbf{P}(\text{barbe})}{\mathbf{P}(a)}$ , mais **il est donné dans les hypothèses de l'énoncé!**

## 4.2. Indépendance en probabilité

### Indépendance(s) en probabilité

#### Définition - Indépendance (en probabilité)

Deux événements d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, P)$  sont dits **P**-indépendants (ou indépendants en probabilité) si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .  
Si le contexte est clair, on parle d'indépendance sans préciser la probabilité **P** considérée.

Ce nouveau point de vue a peut-être pas plus de sens

#### Proposition - Autre point de vue

Si  $P(A) \neq 0$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants (pour **P**) si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

#### Démonstration

#### ⚠ Attention - Dépendance des événements, a priori selon la probabilité considérée

↪ Cette notion dépend de la probabilité considérée sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

#### 🍃 Exemple - Illustration de la remarque précédente

#### ⚠ Attention - Ne pas confondre incompatibles et indépendants

⚡ On fera bien attention à ne pas confondre :

—  $A$  et  $B$  sont incompatibles :

cette notion ne dépend pas de la probabilité :  $A \cap B = \emptyset$ .

cela sert pour calculer  $P(A \cup B)$

(on parle aussi d'événements disjoints avec une vision ensem-

- bliste).
- $A$  et  $B$  sont indépendants :  
 cette notion dépend de la probabilité :  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$ .  
 cela sert pour calculer  $\mathbf{P}(A \cap B)$
- En fait deux événements (non négligeables) incompatibles ne peuvent pas être indépendants.
- Si l'un se réalise, alors l'autre ne peut pas se réaliser...

**Définition - Cas de plus de 2 événements**

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace de probabilité fini

1.  $n$  événements  $A_1, \dots, A_n$  sont dits deux à deux indépendants si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j).$$

2.  $n$  événements  $A_1, \dots, A_n$  sont dits mutuellement indépendants si

$$\forall J \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

**Proposition - Equivalence des complémentaires**

$A, B$  sont indépendants  $\Rightarrow A, \bar{B}$  sont indépendants,  $\bar{A}, \bar{B}$  sont indépendants.

Plus généralement :

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des événements mutuellement indépendants.

Posons pour tout  $i \leq n$ ,  $B_i = A_i$  ou  $\bar{A}_i$ .

Alors  $B_1, B_2, \dots, B_n$  sont mutuellement indépendants.

**Démonstration****◆ Pour aller plus loin - Avec le crible**

Notons  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$  et  $B = \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j$ , donc  $\bar{B} = \bigcup_{j \in J} A_j$ .

$(B, \bar{B})$  est un système complet d'événements :  
 $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \bar{B})$ .

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)\right)$$

On applique alors la méthode du crible :

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=0}^{|J|} (-1)^k \sum_{K \in \binom{J}{k}} \mathbf{P}\left(A \cap \bigcap_{k \in K} A_k\right)$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=0}^{|J|} (-1)^k \sum_{K \in \binom{J}{k}} \mathbf{P}(A) \times \prod_{k \in K} \mathbf{P}(A_k)$$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \dots = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i) \prod_{j \in J} \mathbf{P}(\bar{A}_j)$$

 **Remarque - Une implication**

L'indépendance mutuelle  $\Rightarrow$  l'indépendance deux à deux.  
Mais la réciproque est fautive (voir exercice plus bas).

Exercice

Démontrer l'implication

**Exercices**

Exercice

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.

Les événements  $A$  « la carte tirée est un pique » et  $B$  « la carte tirée est un roi » sont-ils indépendants ?

Exercice

On lance deux dés parfaits. On note :

- $A_1$  : « le premier dé amène un nombre pair »,
- $A_2$  : « le deuxième dé amène un nombre pair »,
- $A_3$  : « la somme des nombres obtenus est paire ».

Les événements  $A_1, A_2, A_3$  sont-ils mutuellement indépendants ? Et deux à deux ?

Exercice

On permute au hasard les chiffres 1, 2, 3, 4. On considère les événements

- $A$  : « 1 est avant 2 »
- $B$  : « 3 est avant 4 ».

$A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

Exercice

On considère une famille ayant  $n$  enfants ( $n \geq 2$ ). On suppose que toutes les répartitions possibles des sexes des  $n$  enfants sont équiprobables.

Les événements « la famille a des enfants des deux sexes » et « la famille a au plus une fille » sont-ils indépendants ?

## 5. Bilan

**Synthèse**

$\rightsquigarrow$  De nombreuses phénomènes ne peuvent s'étudier (aujourd'hui) qu'en introduisant le « hasard » (réel ou plus souvent par manque d'informations). Les mathématiciens proposent alors de modéliser numériquement ces phénomènes, en s'appuyant sur un univers  $\Omega$  (de tous les cas possibles, imaginés), une tribu des événements probabilisables (souvent  $\mathcal{P}(\Omega)$ ) et une mesure de probabilité  $\mathbf{P}$  qui indique la potentielle réalisation de l'événement.

Ce triplet doit vérifier des propriétés mathématiques précises ( $\sigma$ -additivité). Elles sont dans un premier temps associées à la réunion d'ensembles.

- ↪ Nous étudions de nombreux exemples dont la probabilité uniforme sur un univers fini, mais également d'autres exemples (même si le programme officiel nous limite en première année qu'à des situations où  $\Omega$  est fini).
- ↪ Après la modélisation, la seconde idée forte du cours est la notion de conditionnement/(in)dépendance entre événements. Elle permet d'étudier l'intersection d'événements en mesurant la dépendance mutuelle entre ces événements.
- On exploite ces idées dans trois directions : successions d'événements (formule des probabilités composées), partition de l'univers (formule des probabilités totales) ou formule des Bayes (inverser l'ordre logique de la corrélation).

### Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Une bonne habitude à prendre de suite
- Savoir-faire - Suite croissante d'événements et convergence
- Savoir-faire - Exercice de probabilité (1). Choix du modèle.
- Savoir-faire - Suivre un certain formalisme
- Savoir-faire - Botanique (1)
- Savoir-faire - Botanique (2)

### Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$	Espace de probabilité (triplet)	$\Omega$ est un ensemble, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ $\sigma$ -additive	$\mathbf{P}(\Omega) = 1$ , $\mathbf{P}(A \uplus B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ .
A p.s.	L'événement $A$ est vrai presque sûrement	$\mathbf{P}(A) = 1$	.
$\mathbf{P}_B : A \mapsto \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$	Probabilité de $A$ sachant (ou conditionné à la réalisation de l'événement) $B$	$\mathbf{P}_B$ est une mesure de probabilité	Parfois également noté $\mathbf{P}(\cdot   B)$ .

### Retour sur les problèmes

152. Cours
153. Cours. Le lien qui lie les fréquentalistes et les subjectivistes est porté par tous les théorèmes limites. En particulier la loi faible des grands nombres dont on parlera au chapitre suivant.
154. Les simulations informatiques permettent de créer une situation comparable. La répétition d'un nombre très grand de cas, permet d'avoir une approche assez intéressante de la valeur cherchée (en exploitant toujours les théorèmes de convergence).  
Simuler du hasard n'est pas vraiment possible classiquement (quantiquement, il semble que si). On exploite en fait des phénomènes chaotiques (grande sensibilité aux conditions initiales), mais finalement un lancer de dé est bien également un phénomène chaotique...
155. Cours
156. L'indépendance se définit mathématiquement avec précision. Cela rappelle notre appréciation naturelle du phénomène, mais est-ce toujours comme chacun l'entend?
157. Cours. Il manque la connaissance de la part dans la population des cas malades et des cas non malades...

