Chapitre 38

Séries numériques

Résumé -

Dans ce chapitre nous étudions (rapidement) un objet central en mathématiques : les séries numériques. Cela la présentation faite ici, elle dérive des suites numériques, mais en réalité c'est bien l'inverse qui lie ces deux objets : les suites dérivent (de plusieurs façons) des séries.
Nous étudierons la notion première de convergence de série et mettrons en place les premières notations.
Ensuite nous nous concentrons sur les séries à termes positifs. Plusieurs raisons : étudier leur convergence est relativement simple (et il existe des moyens d'étude simplifié dans ce cas là). Certains peuvent même écrire qu'elles convergent toutes (à condition d'accepter $+\infty$ comme limite). Une dernière raison est l'usage de la convergence absolue comme critère suffisant (mais non nécessaire) pour montrer la convergence de la série. Lorsqu'on cherche à montrer la convergence absolue, on considère des séries positives.
Muni de ces outils, nous prouverons tranquillement la convergence du développement décimal d'un nombre.
Enfin, au passage nous rencontrons quelques familles de séries à maîtriser : les séries de Riemann, les séries géométriques et dans une moindre mesure : les séries exponentielles et les séries binomiales négatives.

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 169 - Convergence décimale

Rappelons-nous qu'historiquement une famille importante de suites a été celle des approximations décimales de nombres réelles. Par exemple : $(3-3,1-3,14-3,141-3,1415\ldots)$ qui converge vers π.
Elles sont de la forme : u_{n+1} possède toujours les mêmes premiers termes que u_n avec une décimale supplémentaire. On a donc naturellement une relation de la forme : $u_{n+1} = u_n + d_{n+1}\times 10^{-(n+1)}$ où d_n est la $n+1^{\text{e}}$ décimale de ℓ, la limite envisagée.
On a alors : $u_n = u_{n-1} + d_n 10^{-n} = u_{n-2} + d_{n-1}10^{-n+1} + d_n 10^n = \cdots = u_0 + \sum_{k=0}^{n} d_k 10^{-k}$.
Pour l'étude de ce type de suites, il est nécessaire de s'intéresser aux suites : $\left(\sum_{k=0}^{n} d'_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ...
Convergent-elles nécessairement (dans $\mathbb{R}$) ? Toutes ? Y a-t-il une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$?

? Problème 170 - Etudier une suite définie par récurrence

Considérons une suite définie par récurrence à partir de deux suites données (v_n) et (w_n) :
$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = v_n\times u_n + w_n$.
Notons alors, pour $n\geqslant 1$: $a_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n-1} v_k}$.
Alors $a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} v_k} = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n-1} v_k} + \dfrac{w_n}{\prod_{k=0}^{n} v_k}$.
Et donc, par télescopage : $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{w_k}{\prod_{h=0}^{k} v_h}$.
Ainsi u_n, peut s'exprimer explicitement : $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} v_k \times \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{w_k}{\prod_{h=0}^{k} v_h} + \frac{u_1}{v_0}$.
Il faut pour cela savoir calculer des sommes ou produit (et montrer la convergence de ces sommes et produit).
Comme $\ln(\prod_{h=0}^{k} v_h) = \sum_{h=0}^{k}\ln v_h$, on peut se contenter d'étudier les sommes...
Comment montrer la convergence d'une suite de somme (série) définie par son terme général ?

? Problème 171 - Reconnaissance de la convergence

On donne une expression explicite de a_n.
Est-il possible de déterminer directement si la série (suite de sommes partielles) $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, par un algorithme de décision ?
Est-il possible de calculer directement la limite de la série (suite de sommes partielles) $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ si elle converge ?

? Problème 172 - Comparaison série/intégrale et transformation d'Abel

On l'a déjà dit : pour connaître la variation (instantanée) d'une suite, on calcule « sa dérivée » : $u'_n = u_n - u_{n-1}$. Son signe indique bien si (u_n) est (localement) croissante ou décroissante.
Dans ces cas-là, on trouve que l'opération réciproque de la dérivation est *exactement* le passage à la suite de sommes partielles :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k + C \Longleftrightarrow u_n = U'_n$$

Pouvons-nous transférer toutes les propriétés vues dans les cours sur la dérivation et l'intégration de fonctions aux séries ? En particulier, que devient l'intégration par parties ?
On parle de transformation d'Abel et on l'exploiter exactement au moment où l'on ferait une intégration par parties si le problème posé concernait des fonctions...

2. Généralités

2.1. Définitions

Définition - Séries
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On pose $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$.
On note $\sum u_n$ (ou $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$) la série de terme général u_n, à la place de (S_n).
Le nombre S_n s'appelle la **somme partielle** d'ordre n ou n-ième somme partielle.

Histoire - Nicolas Oresme
Les mathématiciens européens se sont intéressés très tôt à l'étude des séries.

Par exemple, Nicole Oresme (ou Nicolas Oresme), a montré la divergence de la série harmonique. Il est né à Fleury-sur-Orne vers 1320-1322 et mort à Lisieux le 11 juillet 1382, est un philosophe, astronome, mathématicien, économiste, musicologue, physicien, traducteur et théologien français de l'époque médiévale.

Remarque - Une série est une suite...
Une série n'est qu'une suite d'un genre bien particulier.
Très couramment, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

Définition - Convergence, limite
• La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite (S_n) est convergente.
Dans le cas contraire on dit que $\sum u_n$ est **divergente**.
• Si la série est convergente,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

est appelée **somme de la série** et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Attention - Écriture (1)
Que signifie chacune des trois notations suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$ 2. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 3. $\sum_{n=0}^{N} u_n$

1. C'est la série ! (notion mathématique que l'on étudie) *cf. la suite* (a_n)
2. C'est un nombre : la limite de la série ! *cf. la limite* ℓ

Histoire - Mais l'histoire continue
Autour des séries, on retrouve tous les grands mathématiciens. Dans l'ordre chronologique : Fermat, Newton, Taylor, Euler, Lagrange, Abel, Poincaré, Borel... Tous ont apporté leur pierre à l'ouvrage général !

3. C'est un nombre (à nouveau) : la somme partielle *cf. le nombre a_n*

Définition - Suite des restes

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé **reste** d'ordre n de la série.
On a donc nécessairement $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Attention - Écriture (2)

Maintenant au lieu d'écrire $\sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$, nous écrirons R_n ou $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Cette dernière écriture semble naturelle, et pourtant elle ne peut exister que si la série converge (*pourquoi*?).
D'ailleurs si l'on veut calculer le reste R_n d'une série convergente, nous devons nécessairement connaître la limite de la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Le reste n'existe que si on a montré que la limite existe... On peut arranger le coup en exploitant le critère de Cauchy.

Pour aller plus loin - Critère de Cauchy et...
Il arrive qu'on exploiter ce critère, avec une transformation d'Abel en particulier.

Savoir faire - Critère de Cauchy pour les séries

On peut exploiter les équivalences : (S_n) converge si et seulement si (S_n) vérifie le critère de Cauchy

si et seulement si $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p > q \geqslant N$, $\left|S_p - S_q\right| \leqslant \epsilon$.

si et seulement si $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, p > q \geqslant N$, $\left|\sum_{n=q}^{p} u_n\right| \leqslant \epsilon$.

Définition - Série de même nature

Deux séries sont dites de **même nature** si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Exemple - La convergence est indépendance des premiers termes

2.2. Propriétés

Proposition - Condition nécessaire pour la convergence

Si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (la réciproque est fausse!).
Si le terme général ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Démonstration

Attention - GROSSE ERREUR

La réciproque est absolument fausse. *Comment s'exprime-t-elle ?*
L'exercice suivant donne l'exemple d'une série divergente mais dont le terme général tend néanmoins vers 0.
C'est un exemple à connaître par coeur et à mobiliser rapidement en cas de doute.

Exercice

On note pour $k \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la **série harmonique**.

1. Quelle est la limite de $\left(\frac{1}{n}\right)$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n-1} \geqslant \frac{n+1}{2}$
3. Conclure que la série diverge.

(On verra une autre méthode plus loin, et sûrement une autre encore...

2.3. Telescopage

Heuristique - Processus d'intégration

Lorsque l'on souhaite étudier les *variations* d'une fonction, on calcul le *signe* de la dérivée de f.
Lorsque l'on souhaite étudier les *variations* d'une suite, on calcul le *signe* de la suite (v_n) définie par $v_n := u_{n+1} - u_n$.
Si l'on considère qu'il y a d'une certaine façon une équivalence entre la dérivation d'une fonction et la dérivation $(u_n) \mapsto (v_n)$ d'une suite, on peut se demander à quoi correspond la processus inverse de la dérivation, c'est-à-dire l'intégration pour les suites.
Autrement écrit si (v_n) est obtenue en posant pour tout entier n, $v_n = u_{n+1} - u_n$, comment faire pour obtenir (u_n) si seule la suite (v_n) est connue ?
C'est très simple : $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k + u_0 \left(= \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) + u_0\right)$ *(remarquons que l'on obtient une formule à une constante prés comme pour le calcul intégral)*

L'exercice suivant donne une première application.

Exercice

Considérons la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2^n$$

(Cas plus générale que les suites arithmético-géométriques).
Cette suite est-elle convergente, quelle est sa limite, peut-on l'exprimer explicitement ? Pour répondre, considérons $v_n = 3^n u_n$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. En utilisant la méthode du télescopage, montrer que v_n peut s'exprimer comme une somme.
3. En déduire une expression de u_n, ainsi qu'un équivalent de (u_n).

Analyse - L'important ici

Proposition - Lien suite-série
La **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la **suite** (u_n) sont de même nature.

Exercice
Dans les cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et, lorsqu'il y a convergence, calculer la somme de la série.

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1$;
2. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$;
4. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;
5. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Proposition - Séries géométriques
Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n, $\sum q^n$, appelée série géométrique de raison q, converge si et seulement $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Démonstration

2.4. Opérations pour des séries convergentes

Proposition - Opérations sur les séries
Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et λ un réel **non nul**. Alors :
- $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature
  et en cas de convergence $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ converge
  et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
- Si l'une des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge et l'autre diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure quant à la nature de $\sum(u_n + v_n)$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Produit
Que dire de $\sum u_n \times \sum v_n$? Est-ce que cela existe, est-ce que la limite est alors égale à $\sum u_n v_n$?
Non
Il s'agit d'un produit de Cauchy dont on parlera en fin de chapitre.

Proposition - Séries complexes
Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes.
Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \mathfrak{Re} u_n$ et $\sum \mathfrak{Im} u_n$ convergent
et on a alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{Im} u_n.$$

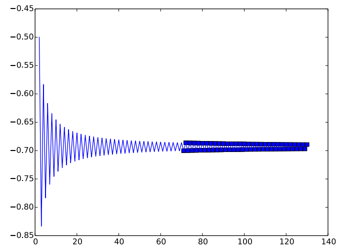
Démonstration

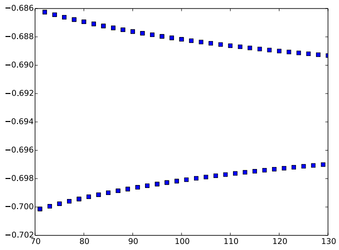
2.5. Un cas classique : les séries de signe alterné

Heuristique - Convergence par « adjacence »
On se trouve dans le cas où $u_n = (-1)^n v_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Dans ce cas là, la somme partielle S_n augmente, diminue, augment, diminue...
On peut espérer que cette suite de somme partielle converge, parce que ces suites extraites paires et impaires sont adjacentes.

Définition - Série alternée
On dit que la série $\sum (-1)^n u_n$ est alternée si
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ *ce qui fait que la série est de signe alterné*
— la suite (u_n) est décroissante.
— $\lim(u_n) = 0$

Représentation - Visualisation
Ce qui donne les représentations graphiques suivantes :





Exemple - Série harmonique alternée

Informatique - Visualiser la convergence

```
import matplotlib.pyplot as plt
def serie_alt(n,m):
    """serie alt. harmo., on trace les sommes entre n et m"""
    s=0.
    S=[]
    K=[]
```

```
    for k in range(n):
        s=s+(-1)**(k+1)/(k+1)
        for k in range(n,m):
            s=s+(-1)**(k+1)/(k+1)
            S=S+[s]
            K=K+[k+1]
    plt.plot(K,S)
    return(s)
```

Proposition - Critére de Leibniz
Soit (u_n) décroissante, positive, de limite nulle.
On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.
Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ (de signe alternés) est convergente.
Par ailleurs, on a l'inégalité de *contrôle* (très importante) :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k - S\right| \leqslant u_n$$

où $S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est la limite (somme) de la série.

Démonstration

Exercice

Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^k}{k}$ converge (série harmonique alternée).
Jusqu'à quelle valeur de n est-il suffisant de faire le calcul pour avoir une approximation de la limite de cette série à 10^{-5} prés (on peut penser à la rédaction d'un programme informatique d'approximation) ?

3. Séries à termes positifs

3.1. Majoration des sommes partielles

Heuristique - Motivations

Il y a plusieurs raisons qui motivent l'étude des séries positives.

1. La première est qu'ainsi on peut utiliser facilement le théorème de convergence monotone (des suites), puisque la suite des sommes partielles et dans ce cas une suite croissante.
2. La seconde est que les séries absolument convergentes (donc à termes positives) donne une condition suffisante pour l'étude de la convergence des séries.
3. Et même si on se place dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ (on accepte des limite égale à l'infini), on peut affirmer que toute série à termes positifs est convergente. C'est ce qu'on fait dans la définition de l'intégrale de Lebesgue (cf. cours sur la sommabilité)...

Pour aller plus loin - Sommer une infinité de termes strictement positifs, n'est-ce pas ridicule ?

Certains sont choqués à l'idée que l'on puisse sommer une infinité de termes strictement positifs et que cela ne tende pas vers l'infini...
Ainsi, n'a-t-on pas simplement ?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = 0,5+0,25+0,125+\cdots \longrightarrow +\infty$$

*C'est un choc **salutaire**, que vous **devez avoir**... et **dépasser**.*
Prenons l'exemple suivant de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$.
On sait que $\forall\ n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}$.
Or cette suite converge simplement vers 2, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ *converge vers 2*

Théorème - Condition simple de convergence
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
(Il suffit en fait que $u_n\geqslant 0$ à partir d'un certain rang.)
$\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée (c'est-à-dire s'il existe M tel que $\forall n$, $S_n\leqslant M$).
Dans le cas contraire on a $\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

Démonstration

3.2. Comparaison des séries à termes positifs

Théorème - Inégalités
On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right) \quad \text{et} \quad \left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Démonstration

Proposition - Majoration par négligeabilité
On suppose qu'à partir d'un certain rang $0 \leqslant u_n$ et $0 \leqslant v_n$ et que $u_n = O(v_n)$.
Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge }\right) \quad \text{et} \quad \left(\sum u_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge }\right).$$

Démonstration

Histoire - Bernard Riemann
Riemann est l'un des plus grand mathématicien.

Georg Bernhard Riemann né le 17 septembre 1826 à Breselenz et est mort le 20 juillet 1866 à Selesca (Italie). Il est un mathématicien et physicien allemand.

Théorème - Équivalents
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang,
alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

On a des résultats plus précis encore :

Exercice
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à *termes positives* telles que : $u_n \underset{n}{\sim} v_n$. Montrer que :

— si ces séries *convergent* alors les *restes* sont équivalents : $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$

— si ces séries *divergent* alors les *séries* sont équivalents : $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$

On rappelle que la recherche d'équivalents se fait pour des suites tendant vers 0 (restes, pour séries convergentes) ou vers $+\infty$ (sommes partielles, pour séries divergentes).

3.3. Exploitation des séries de Riemann

Théorie

Proposition - Séries de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Exercice
En exploitant l'exercice de la partie précédente, donner des équivalents des sommes partielles/restes des séries de Riemann

Savoir-utiliser

Exercice
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Le corollaire suivant est plutôt à considérer comme un savoir-faire.

Savoir faire - Méthode du « $n^\alpha u_n$ »
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
— S'il existe $\alpha > 1$ réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
— S'il existe $\alpha \leqslant 1$ réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Pour aller plus loin - Culture
On a les résultats suivants $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

Pour aller plus loin - Constante de Mascheroni
Notons que la suite $\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$ *converge.*
On note γ, sa limite (appelé constante d'Euler-Mascheroni).
$\gamma \approx 0,5772156649015328606...$

Démonstration

3.4. Séries absolument convergentes

Définition - Série absolument convergente
La série $\sum u_n$ ($u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$) est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème - Implication
Une série absolument convergente est convergente.

Attention - La réciproque est fausse
On exploite le contre-exemple classique suivant : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

— $\sum u_n$ est convergente.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \dfrac{-1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{-1}{4n^2+6n+2}$.
$-a_n > 0$, $-a_n \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\sum \frac{1}{4n^2}$ converge.
Donc $\sum a_n$ également.
Enfin, notons que

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} a_n$$

Donc par encadrement, la série $\sum u_n$ converge.
— $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente, cela signifierait que la série harmonique converge.

Démonstration

4. Quelques méthodes d'étude

4.1. Plan d'étude

Remarque - Différence entre...
Lorsqu'il faut faire des démonstrations de types « théoriques », on exploite souvent la stratégie :

1. Etude (calcul, croissance...) de la (suite des) somme(s) partielle(s).
2. Puis passage à la limite (ou majoration)

Lorsqu'il faut faire des démonstrations pratiques, on ne s'intéresse pas à la suite des sommes partielles, mais **on se concentre sur la suite de terme général** (directement!) grâce aux théorèmes de comparaisons.
Ce sont deux approches très différentes!

Savoir faire - Plan d'étude d'une série numérique

nature de la suite	terme général	méthode d'étude de la série
(u_n) diverge		$\sum u_n$ diverge
$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$		$\sum u_n$ diverge
$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	u_n réel, $\forall n, u_n \geqslant 0$	on compare à une série de référence ou on « voit » un téléscopage ou on majore les sommes partielles ou on compare avec une intégrale
	u_n réel, $\forall n, u_n \leqslant 0$	on étudie la série de t.g. $-u_n$
	$u_n = (-1)^n v_n$ si $(v_n) \searrow$ (ou $\nearrow$) (nécessairement $(v_n) \to 0$)	On applique le critère de LEIBNIZ
	u_n réel mais pas de signe constant	on étudie $\sum \lvert u_n\rvert$ avec $\lvert u_n\rvert \geqslant 0$: si $\sum \lvert u_n\rvert$ cv alors $\sum u_n$ cv si $\sum \lvert u_n\rvert$ div : voir au cas par cas
	u_n complexe	on étudie $\sum \lvert u_n\rvert$ avec $\lvert u_n\rvert \geqslant 0$: si $\sum \lvert u_n\rvert$ cv alors $\sum u_n$ cv si $\sum \lvert u_n\rvert$ div : on étudie $\sum \mathfrak{Re}\, u_n$ et $\sum \mathfrak{Im}\, u_n$

Le tableau sera complété encore l'année prochaine : semi-convergence : convergence de la série et non convergence absolue, critère de d'Alembert...

4.2. Comparaison série-intégrale

Lemme - Comparaison directe
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0 + 1, \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition - Même comportement série-intégrale
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et f continue par morceaux, positive, décroissante sur $[n_0, +\infty[$.
Alors $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'application $x \mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Démonstration

Savoir faire - Comment exploiter la comparaison série-intégrale

Si f est monotone à partir d'un certain rang X, alors pour tout $n \geqslant \lfloor X \rfloor + 1$, on a - cas décroissant - : $\forall\ N \geqslant N$, $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n}^{N} f(t)\mathrm{d}t$.
(pour le cas croissant, les inégalités sont inversées).
Puis, par méthodes supplémentaires sur les calculs d'intégrales : IPP, changement de variable, utilisation de la primitive..., on peut transférer, par encadrement les informations sur la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant N} f(k)$.

4.3. Séries de référence

Les deux derniers résultats, hors-programme en première année, sont données « pour la culture ».

Truc & Astuce pour le calcul - Série de référence

- Série de Riemann

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Série géométrique

La série de terme général x^n est convergente si et seulement si $|x| < 1$.

- Série du binôme négatif

Soit $r\in\mathbb{N}$. Si $|x|<1$, la série $\sum_{k\geqslant r}\binom{k}{r}x^{k-r}$ converge ;

$$\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k}{r}x^{k-r}=\sum_{h=0}^{+\infty}\binom{r+h}{h}x^h=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

• Série exponentielle

Pour tout x complexe, la série $\sum\frac{x^n}{n!}$ converge ; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

Exercice

Soit $x\in]-1,1[$.

On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_p^n=\binom{p+n}{p}x^p$. On s'intéresse à la série $T^n=\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}a_p^n$.

1. Montrer que la série T^n est convergente.
2. Rappeler la formule du triangle de Pascal.
3. Simplifier (téléscopage) $(1-x)\displaystyle\sum_{p=0}^{N}a_p^n$, en déduire : $(1-x)\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}a_p^n=\sum_{p=0}^{+\infty}a_p^{n-1}$
4. Exprimer T^0, en déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$ la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{p+n}{p}x^p=\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{p+n}{n}x^p$

Exercice

Soient les deux suites (S_n) et (S'_n) telles que

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $S'_n=\dfrac{1}{n\cdot n!}+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

1. Montrer que (S_n) et (S'_n) sont adjacentes.

Nous admettons qu'elles convergent vers e (voir dernière question).

2. Ecrire un programme en Python utilisant les suites (S_n) et (S'_n) pour calculer une approximation de e à 10^{-6}
3. Soit $x>0$. Soient $p,n\in\mathbb{N}$ avec $p\leqslant n$.
   (a) Montrer que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1\times(1-\frac{1}{n})\times\cdots\times(1-\frac{k-1}{n})}{k!}x^k$
   (b) En faisant tendre n vers l'infini, en déduire que $e^x\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}$.
   (c) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!}\right)_p$ est convergente (série à termes positifs)
   (d) Par ailleurs, montrer que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$ *(remarquer la différence avec la question (a))*
   (e) En déduire que $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ (notation de la limite de la suite définie par une somme).

Savoir faire - Calcul exact avec des séries exponentielles

Considérons un polynôme P de degré d (pas trop élevé).

On cherche à calculer la valeur de $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ où $x\in\mathbb{R}$.

La famille $\big(1,X,X(X-1),\dots X(X-1)\cdots(X-d)\big)$ est échelonnée, composée de $d+1$ polynômes : elle forme une base de $\mathbb{K}_d[X]$.

Donc il existe $a_0, a_1, \dots a_d$ tels que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k N_k$ où $N_k = X(X-1)\cdots(X-k)$ (qu'est-ce N_0 ?)
Alors *par linéarité* : $S = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{N_k(n)}{n!} x^n\right)$ mais $N_k(n)$ **et** $n!$ **se simplifient**...

Exercice

Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 2^n}{n!}$

5. Bilan

Synthèse

- $\rightsquigarrow$ On s'intéresse à un cas particulier de suites : les séries. Ce sont des cas particuliers car on les étudie comme les suites des sommes partielles. Et en même temps, toute suite peut se voir comme suite de sommes partielles d'une série...
  Une série convergente a nécessairement son terme général qui tend vers 0. Et plus généralement la suite des restes.
- $\rightsquigarrow$ Pour étudier les séries, on utilise nécessairement d'autres méthodes que celles des suites (sinon, cela ne ferait pas un chapitre différent). Pour le cours et démontrer les propositions : on exploite les résultats sur les suites. Mais, une fois ces propositions démontrées, on n'y revient plus.
  Ainsi la méthode est toujours la même : quel est le signe du terme général ? Si il est constant, on peut comparer à une série de Riemann ; si il est alterné, on exploite le critère de Leibniz.
- $\rightsquigarrow$ Lorsque tout est positif, on peut dire d'une certaine façon que tout est plus simple : soit la somme est infinie, soit elle est finie et donc la série convergente. Cela se généralise aux sommes multiples !
  Mais, lorsque le terme général change infiniment de signe, tout est plus compliqué. Le critère de convergence absolue peut aider, mais il n'est pas toujours efficace (d'où certains problèmes rencontrés en probabilité discrète de deuxième année).
- $\rightsquigarrow$ On s'intéresse à la convergence (deux points précédents), mais on peut aussi s'intéresser à la valeur exacte de la limite lorsqu'on sait que la série converge.
  Pour faire cette étude, il y a beaucoup moins de résultats. La méthode d'emploi des séries entières (deuxième année) est la plus complète. On l'anticipe ici en donnant le résultat pour les séries géométriques, binomiales (négatives) et exponentielles.
- $\rightsquigarrow$ Les séries est le meilleur outil pour étudier le développement décimal des nombres réels.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Critère de Cauchy pour les séries
— Savoir-faire - Méthode du « $n^\alpha u_n$ »
— Savoir-faire - Comment exploiter la comparaison série-intégrale
— Savoir-faire - Plan d'étude d'une série numérique
— Truc & Astuce pour le calcul - Série de référence
— Savoir-faire - Calcul exact avec des séries exponentielles

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$	Série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$	On ne peut se poser la question que de la convergence ou non	Elle ne dépend pas des premiers termes.
$\sum_{n=n_0}^{N} u_n$	Somme partielle de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$		C'est le terme de rang N d'une suite.
$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$	Limite ou Somme de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$		On ne l'écrit qu'après avoir prouvé la convergence de la(série
$(R_n)_n$	Suite des restes de la série de terme général $(u_n)_{n\geqslant n_0}$	$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$	On ne l'écrit qu'après avoir prouvé la convergence de la série

Retour sur les problèmes

169. Oui, elles convergent toutes, car ici ce sont des series à termes positifs.
Le terme général d_n est majorée par 9×10^n, et les sommes partielles sont majorées par d_0+1.
On peut associer à tout nombre réel un développement décimal. Mais il n'y a pas injectivité : $0,999\dots 99\dots = 1,0\dots$.
C'est le sens de toute la partie 5 de ce chapitre.

170. Cours. On notera ici la manipulation pour revenir d'un cas relativement générale $u_{n+1} = u_n\times v_n + w_n$ à l'étude d'une série $\sum \ln v_n\dots$

171. Il faut vraiment apprendre le tableau des méthodes pour montrer la convergence des séries. Et celui qui donne la valeur de la limite de (certaines) séries.

172. L'IPP, c'est $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$.
On démontre ce résultat en dérivant $f\times g$. Si la dérivation c'est le passage $u_n \to u_{n+1}-u_n$, on trouve :

$$\begin{aligned}(uv)_{k+1}-(uv)_k &= u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_k = u_{k+1}v_{k+1}-u_kv_{k+1}+u_kv_{k+1}-u_kv_k\\ &= (u_k)'v_{k+1}-u_k(v_k)'\end{aligned}$$

Donc en sommant pour k entre 0 et $n-1$:

$$u_nv_n - u_0v_0 = [uv]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)v_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}u_k(v_{k+1}-v_k)$$

On appelle transformation d'Abel la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1}u_k(v_{k+1}-v_k) = u_nv_n - u_0v_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)v_{k+1}$$