MPSI 3 - Fermat
2016-2017

Pour le 16.05.17

Devoir à la maison n°10

Problème I - Fonction indicatrice de Dirichlet

I. Ensembles exceptionnels dénombrables.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'une partie dénombrable $E = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$.
   Montrer que f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est nulle.
   Indication : choisir une fonction jauge δ telle que $\delta(u_i) \leqslant 2^{-i}\frac{\epsilon}{1+|f(ui)|}$.
2. Montrer que si deux fonctions $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffèrent uniquement sur une partie dénombrable $E = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$, alors l'intégrabilité de l'une au sens de Kurzweil-Henstock équivaut à l'intégrabilité de l'autre, et que leurs intégrales sont égales.

II. Fonction de Dirichlet

Soit $f = \chi_{\mathbb{Q}}$,indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

On rappelle que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel et un irrationnel.
Soit n un entier strictement positif. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $a_j = \frac{j}{n}$.

1. Montrer à l'aide de la partie précédent que f est intégrable au sens de Kurzweil- Henstock sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Soit $([a_j, a_{j+1}])$ une subdivision de $[0, 1]$.
   Montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, il existe x_j, $y_j \in [a_j, a_{j+1}]$ tels que $f(x_j) = 1$ et $f(y_j) = 0$.
3. On considère les deux subdivisions pointées
   $$D_1 = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0\leqslant j<n} \qquad \text{et} \qquad D_2 = \{([a_j, a_{j+1}], y_j)\}_{0\leqslant j<n}.$$
   Montrer que $S(f, D_1) = 1$ et $S(f, D_2) = 0$.
4. En déduire que f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$
   (avec une jauge constante égale à δ).

Problème II - Endomorphisme antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E.
Un endomorphisme f de E est dit antisymétrique si $\forall\ x, y \in E$, $(f(x)|y) =?(x|f(y))$.

I. Un exemple

Ici E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $B = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E et $u = a.i + b.j + c.k$ un vecteur non nul de E.
On considère ici $f : E \to E$ l'application définie par : $\forall\ x \in E$, $f(x) = u \wedge x$.

1. Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique.
2. Décrire $\mathrm{Im}\ f$ et $\mathrm{Ker}\ f$.
3. Former la matrice représentative de f dans B. Quelle particularité présente cette matrice ?

II. Etude générale

On revient au cas général où E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit f un endomorphisme de E.
   Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est antisymétrique,
   (ii) la matrice représentative de f dans une base orthonormée est antisymétrique,
   (iii) $\forall\ x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.
2. On note $A(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes antisymétriques de E .
   (a) Etablir que $A(E)$ est un sous-espace vectoriel d'un espace connu que l'on précisera.
   (b) Quelle est la dimension de $A(E)$?
3. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.
   (a) Etablir que $\det(f) = (-1)^n \det f$. Qu'en déduire lorsque n est impair ?
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\ f$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker}\ f$.
   (c) Montrer que la restriction de f à $\mathrm{Im}\ f$ est un endomorphisme antisymétrique injectif de $\mathrm{Im}\ f$.
   (d) En déduire que le rang de f est pair.

III. Description des endomorphismes antisymétriques en dimension 3

On se place à nouveau dans le cas où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Dans cette partie, on désire établir que pour tout endomorphisme antisymétrique de E , il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Vérifier le résultat dans le cas où f est l'endomorphisme nul.
2. On suppose dans cette question que f n'est pas nul.
   (a) Quel est le rang de f ?
   (b) Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}\ f \oplus^{\perp} \mathrm{Ker}\ f$.
   Vérifier que le matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme voulue.
3. Etablir que pour tout f endomorphisme antisymétrique de E, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que : $\forall\ x \in E$, $f(x) = u \wedge x$.